Filtri passa basso per elaborazioni temporali di immagini

Paolo Medici
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione di Parma

5 marzo 2007

Essendo una richiesta comune quella di valutare un filtro passa basso per confrontare temporalmente pixel delle immagini, vengono qui presentati due filtri molto semplici da realizzare in software e confrontati per mostrare la risposta in frequenza.

1 filtro a una costante

Il filtro passa basso più semplice da realizzare e che utilizza meno memoria è quello con solo una costante a, di equazione:

$$y_n = a \cdot x_n + (1-a) \cdot y_{n-1} \tag{1}$$

Tale filtro è molto vantaggioso perchè richiede solo il dato corrente e il dato precedente. La trasformata Z si può scrivere come:

$$Y(z) = a \cdot X(z) + (1-a) \cdot Y(z) z^{-1} \tag{2}$$

questa equazione è quella di un filtro digitale $H(z)$ di equazione:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1-(1-a)z^{-1}} \tag{3}$$

Per calcolare la banda nel dominio continuo usiamo la sostituzione $z = \cos \omega T_c + j \sin \omega T_c$ e otteniamo il filtro nella trasformata di Laplace:

$$H(j\omega) = \frac{a}{1-(1-a)\cos \omega T_c + j(1-a)\sin \omega T_c} \tag{4}$$

Il cui modulo si può scrivere come:

$$|H(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{1-2(1-a)\cos \omega T_c + (1-a)^2}} \tag{5}$$

Tale andamento è mostrato in figura 1.
La frequenza di taglio $|H(j\omega)| = \frac{1}{2}$ è

$$\cos \omega T_c = -\frac{3a^2+2a-2}{2(1-a)} \tag{6}$$

L'andamento della frequenza di taglio è mostrato nel grafico 2.
Tale filtro, che usa pochissima memoria, presentata tuttavia il problema della sensibilità alla quantizzazione che ne modifica sensibilmente la risposta in frequenza, non in maniera peggiorativa ne migliorativa, ma dipende molto dall'applicazione.

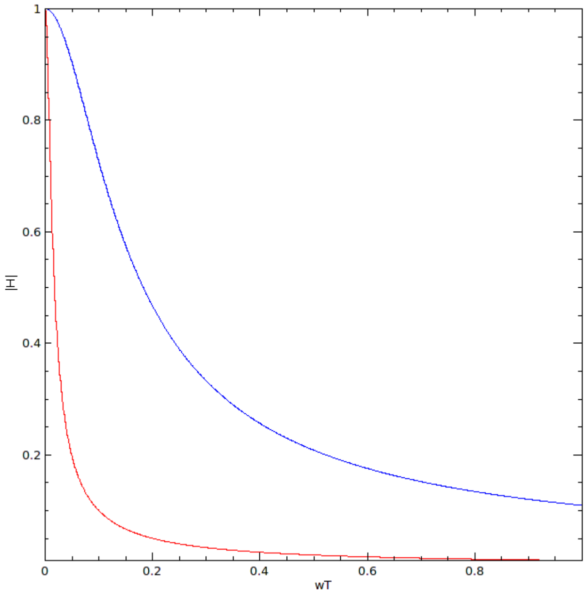

Figura 1: Risposta in frequenza del filtro 1 con $\alpha = 0.1$ (blu) e $\alpha = 0.01$ (rosso)

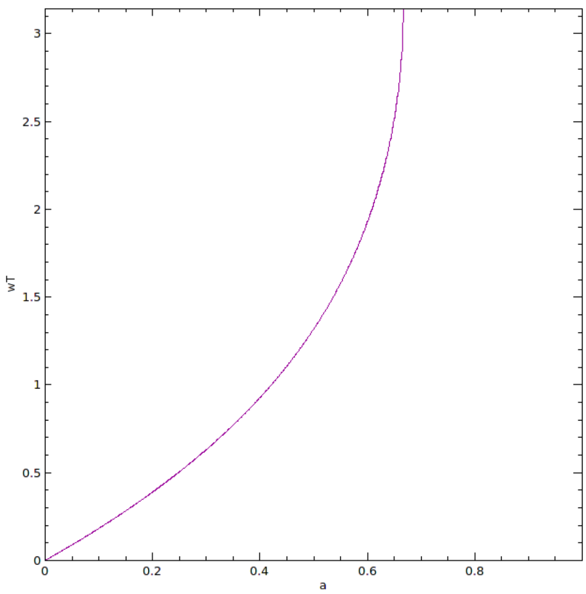

Figura 2: Frequenza di taglio del sistema al variare di a

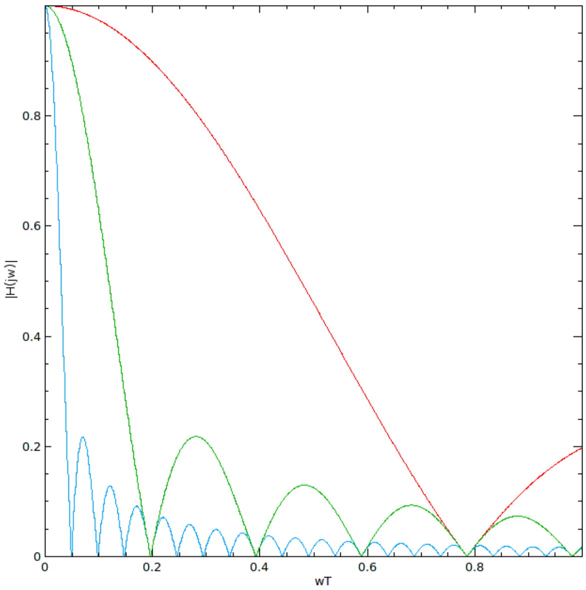

Figura 3: Risposta in frequenza del filtro 2 con $N = 128$ (blu), $N = 32$ (verde) e $N = 8$ (rosso)

2 Filtro a finestra

Un filtro passa basso che esegue la media aritmetica degli N elementi precedenti si può scrivere come:

$$y_n = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_{n-i} \tag{7}$$

Ovvero, Z trasformando:

$$Y(z) = \frac{X(z)}{N}\sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{X(z)}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \tag{8}$$

Questa equazione è quella di un filtro digitale $H(z)$ di equazione:

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N(1-z^{-1})} \tag{9}$$

che in frequenza si può scrivere come:

$$H(j\omega) = \frac{1}{N}\frac{1-\cos(\omega T_c N) + j\sin(\omega T_c N)}{(1-\cos(\omega T_c) + j\sin(\omega T_c))} \tag{10}$$

usando le formule di Werner si ottiene:

$$H(j\omega) = \frac{1-\cos(\omega T_c) - \cos(\omega T_c N) + \cos(\omega T_c(N-1)) + j\sin(\omega T_c N) - j\sin(\omega T_c) - j\sin(\omega T_c(N-1))}{2N(1-\cos(\omega T_c))} \tag{11}$$

La cui risposta in ampiezza è mostrata in figura 3.