

# Teoria dei Veicoli Autonomi

Paolo Medici

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione di Parma

13 febbraio 2014

DRAFT

This is only a preliminary italian version. English version will be ready as soon as possible (after the completion of the italian version, in order to not have two different version to update), but I hope that mathematics is an universal language and easy to be understood (for the moment).

È possibile trovare l'ultima versione di questo documento a <http://vislab.it/medici>. Tutto il materiale di Teoria dei Veicoli Autonomi è rilasciato sotto licenza Creative Commons 3.0. Il testo completo della licenza è disponibile, in inglese, alla pagina <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>.

This document is a brief introduction to the fundamentals of vehicle dynamic and control. You can find the latest version of this document at <http://vislab.it/medici>. This work may be distributed and/or modified under the conditions of the Creative Commons 3.0. The latest version of the license is in <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>.

Prerequisito per usare questo libro è buona parte della teoria statistica e di filtraggio bayesiano disponibile in “Elementi di Analisi per Visione Artificiale”, sempre disponibile a <http://vislab.it/medici>.

Copyright 2006-2013 Paolo Medici

DRAFT

# Capitolo 1

## Vehicle Dynamic

La conoscenza accurata del modello del veicolo è la parte determinante per permettere un controllo più preciso del veicolo stesso.

Esistono svariati tipi di veicoli e ognuno ha un modello che può essere categorizzato più o meno bene in modelli standard. I modelli più diffusi sono quello di Ackerman con la presenza di ruote sterzanti, Skid-Steer dove non esiste uno sterzo ma si usa la differenza di rotazione delle ruote nei due assi, e altri.

### 1.1 Modello del pneumatico

Il modello del pneumatico è la parte più importante e più difficile da gestire del modello di un veicolo [PoAE06].

### 1.2 Uniciclo

Un uniciclo è un ‘veicolo’ formato da una sola ruota orientabile. La sua configurazione è totalmente descritta dai parametri  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$  dove  $(x, y)$  sono le coordinate cartesiane della ruota e  $\theta$  l’orientazione della ruota rispetto agli assi.

### 1.3 Fondamenti del moto dei veicoli

In generale, in assenza di slittamenti, il veicolo esegue una traiettoria circolare, il quale centro di rotazione istantaneo (*ICR*) è il punto di incontro delle perpendicolari ai vettori di velocità delle singole ruote.

Se tuttavia l’angolo di deriva (*slip angle*  $\beta$ ) è basso (solitamente questo vuole dire velocità del veicolo bassa) e il passo del veicolo  $L$  (distanza tra i due assi delle ruote) piccolo rispetto al raggio di curvatura  $R$ , il veicolo segue una traiettoria circolare dove il vettore velocità di ogni singola ruota coincide con la ruota stessa ( $\alpha_r = 0$  e  $\alpha_f = 0$ ): il centro di rotazione è l’incrocio delle perpendicolari alle ruote stesse (fig. 1.1).

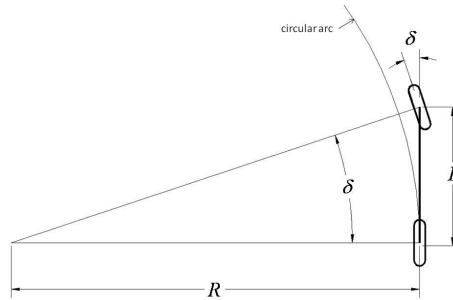


Figura 1.1: Simplified model for a two-axle vehicle: geometric Bicycle Model. Modello semplificato del veicolo.

Nel caso di veicolo di 4 ruote, se le ruote sterzanti restano tra loro parallele, cade l’ipotesi di mancanza di slittamento. Per evitare lo slittamento le due ruote sterzanti devono assumere due angoli leggermente differenti [AB].

Da semplici considerazioni geometriche è possibile collegare il raggio di curvatura  $\kappa$  all’angolo che assumono le ruote sterzanti del veicolo  $\delta$  (in diverse pubblicazioni tale angolo è indicato con  $\psi$ ):

$$\kappa(s) = \frac{\tan \delta(s)}{L} \quad (1.1)$$

Tale angolo è chiamato *Ackerman Angle*, *vehicle's steering angle* o *wheel angle*. Tale relazione introduce il modello del biciclo (fig. 1.1), dove le 4 ruote dell'auto vengono compresse in due ruote solamente (*single-track model*), compattando le ruote dello stesso asse.

È da notare che normalmente il raggio di curvatura è approssimato perpendicolare nel centro di massa nel caso di modello dinamico e all'asse posteriore nel caso del modello cinematico.

In entrambi i casi, la connessione tra l'angolo dello sterzo  $\delta_w$  e curvatura  $\kappa$  potrebbe essere non lineare (esiste una relazione biunivoca che lega  $\delta$  con  $\delta_w$ , e per come è costruito lo sterzo di Ackermann tale relazione normalmente è lineare) anche nel caso semplice del modello del biciclo.

Nel caso di angoli piccoli è facile trovare in letteratura [Won01, Wid02] una versione linearizzata dell'equazione 1.1:

$$\delta(s) \approx \frac{L}{R} \quad (1.2)$$

Un'altra versione è quella del modello di veicolo bitraccia (figura 1.2) dove l'angolo delle due ruote sterzanti vale

$$\tan \delta_o(s) = \frac{L}{R + \frac{B}{2}} \quad \tan \delta_i(s) = \frac{L}{R - \frac{B}{2}} \quad (1.3)$$

dove  $B$  è la distanza delle ruote sullo stesso asse,  $\delta_o$  è l'angolo della ruota esterna e  $\delta_i$  l'angolo della ruota interna alla curva.

L'equazione 1.3 può essere riscritta come

$$\cot \delta_o(s) - \cot \delta_i(s) = \frac{B}{L} \quad (1.4)$$

Questa condizione è nota come *Ackerman condition* [Jaz09] o *Jeantaud condition*.

Per semplicità normalmente si usa l'equazione 1.1 che fornisce il valor medio dei due angoli, ma la deviazione dovuta a questa approssimazione può essere non trascurabile. Se si vuole tenere conto del modello completo (*double track model*) l'equazione 1.1 può essere riscritta in termine dell'angolo interno:

$$\kappa = \frac{2 \tan \delta_i}{2L + B \tan |\delta_i|} \quad (1.5)$$

Se si considera il legame tra  $\delta_w$  e  $\delta_i$ , il fatto che il centro di rotazione è supposto sull'asse posteriore, risulta evidente come sia difficile legare  $\delta_w$  a  $\kappa$ .

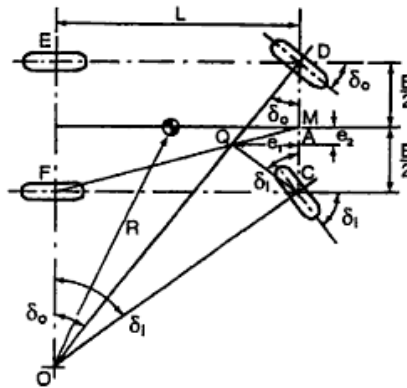


Figura 1.2: Modello “bitraccia” del veicolo. Steering geometry for a road vehicle (Wong)

### 1.3.1 Ascissa curvilinea

$ds/dt = \mathbf{v}$  quindi  $ds = \mathbf{v} dt$

### 1.3.2 Sistemi di riferimento

Le coordinate mondo, solitamente ENU (Est Nord Up), sistema di riferimento assoluto. Il sistema di riferimento sensori e il sistema di riferimento veicolo. Questi due sistemi di riferimento sono differenti in quanto uno è rigidamente attaccato al veicolo e l'altro attaccato alle ruote.

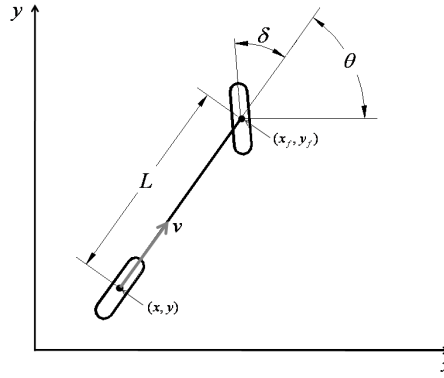


Figura 1.3: Kinematic Bicycle Model. Modello semplificato del veicolo.

### 1.3.3 Curvatura

Il concetto di curvatura è il concetto fondamentale del controllo laterale dei veicoli. L'unità di misura sono  $[rad]/[m]$  e si misura lungo l'ascissa curvilinea.

sia  $f(t) = (x(t), y(t))$  traiettoria, curva espressa in forma parametrica. La curvatura  $\kappa(t)$  si calcola come

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (1.6)$$

### 1.3.4 Cinematica dei veicoli

Uno dei modelli più semplici da capire è quello della *simple car* [LaV06] (un elenco dei sinonimi di tale modello è elencato sotto). Verrà utilizzato il modello cinematico del biciclo, lasciando la trattazione del modello dinamico alla sezione successiva. Immaginiamo il veicolo come un corpo rigido che si muove su un piano e rappresentiamo lo stato del veicolo come  $q = (x, y, \theta)$ .

Definiamo  $s$  lo spazio percorso sull'arco di circonferenza dal centro di massa del veicolo (o del dentro dell'asse posteriore),  $\theta(s)$  è l'angolo che assume il veicolo (*heading*) rispetto al sistema di riferimento,  $\kappa(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{d\theta}{ds}$  la variazione della direzione del veicolo  $\theta$  ovvero la curvatura in un punto dato che cambia in base alla posizione linearmente  $\kappa(s) = \kappa_0 + \sigma s$ . La *sharpness*  $\sigma = \frac{d\kappa}{ds}$  è la variazione della curvatura rispetto alla distanza  $s$  percorsa sulla curva.  $\kappa_0$  è la curvatura iniziale, mentre  $\theta_0$  è l'angolo iniziale. Siccome si suppone il veicolo a velocità costante, usare  $s$  o  $t$  risulta indifferente (a meno di un fattore moltiplicativo  $ds = vdt$ ).

Per piccole variazioni di spazio (o tempo) il veicolo (il centro di massa/asse centrale posteriore) si muoverà nella direzione in cui è orientato.

Quello che viene chiamato modello cinematico del biciclo, o *Ackermann kinematic model*, o modello *CC car* (*Continuous Curvature Car* [FS04] o anche *continuous-steering car* [LaV06]), usando la 1.1, è un sistema differenziale:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta \\ \dot{y} &= \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \kappa \\ \dot{\kappa} &= \sigma \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove la notazione  $\dot{(\cdot)}$  indica la derivata dello spazio percorso  $ds$ . Il passaggio tra derivate dello spazio e derivate del tempo è immediato e legato alla velocità  $v(t)$ . Esplicitando  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta} = \kappa(s) = \kappa_0 + \sigma s \quad (1.8)$$

e conseguentemente

$$\theta(s) = \frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s + \theta_0 \quad (1.9)$$

È infine da notare che  $\dot{\kappa}$  secondo l'equazione 1.1 vale

$$\sigma = \dot{\kappa} = \frac{\dot{\delta}}{L \cos^2 \delta} \quad (1.10)$$

È chiaro pertanto che l'avere  $\dot{\delta}$  costante non basta per avere  $\sigma$  costante, se non per  $\delta$  piccoli.

Questo modello è valido quando le forze laterali sui pneumatici sono trascurabili, normalmente a basse velocità.

### 1.3.5 Calcolo della traiettoria dal punto di vista computazionale

Come risulta evidente, mantenere nelle equazioni  $\theta_0$  e  $\kappa_0$  complica il problema dal punto di vista computazione, e in ogni caso l'integrale  $\int \sin(s^2)ds$  non è fornito normalmente da un calcolatore ma bisogna appoggiarsi a una funzione esterna, meno efficiente. Per quanto riguarda l'angolo iniziale  $\theta_0$  con cui il veicolo è orientato, questo rappresenta una pura rotazione del mondo e conseguentemente tale angolo può essere sempre sottointeso (il risultato si ricava anche dalle formule di addizione trigonometriche di seno e coseno).

Supponiamo di percorrere distanze  $s$  abbastanza piccole da poter fare l'espansione di Taylor del seno e del coseno delle equazioni 1.7 tali che:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta(s) = 1 - \theta(s)^2/2 + \theta(s)^4/24 + O(5) \\ \dot{y} &= \sin \theta(s) = \theta(s) - \theta(s)^3/6 + \theta(s)^5/120 + O(5)\end{aligned}\quad (1.11)$$

da cui è possibile ottenere infine gli integrali come somma di polinomi. Il non inserire  $\theta_0$  nell'espansione di Taylor permette di poter considerare qualsiasi angolo iniziale senza perdere ulteriormente precisione.

Combinando la precedente con l'equazione 1.9 si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta(s) = 1 - (\tfrac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^2/2 + (\tfrac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^4/24 + O(5) \\ \dot{y} &= \sin \theta(s) = \tfrac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s - (\tfrac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^3/6 + (\tfrac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^5/120 + O(5)\end{aligned}\quad (1.12)$$

la cui soluzione è un integrale di polinomi.

Infine è possibile anche una forma un po' più chiusa dell'equazione, usata frequentemente in letteratura. Se si suppone di avere oltre a  $\theta_0 = 0$  anche la curvatura iniziale nulla  $\kappa_0 = 0$  si ha la classica equazione della clotoide espressa con gli integrali di Fresnel:

$$\begin{aligned}x(s) &= \int \cos(\tfrac{1}{2}\sigma s^2)ds = \sqrt{\tfrac{\pi}{\sigma}}C(\sqrt{\tfrac{\sigma}{\pi}}s) \\ y(s) &= \int \sin(\tfrac{1}{2}\sigma s^2)ds = \sqrt{\tfrac{\pi}{\sigma}}S(\sqrt{\tfrac{\sigma}{\pi}}s)\end{aligned}\quad (1.13)$$

dove  $C(S)$  e  $S(s)$  sono le funzioni coseno e seno di Fresnel, definite come:

$$\begin{aligned}S(x) &= \text{fresnel}_s(x) = \int_0^x \sin(\tfrac{\pi}{2}t^2)dt \\ C(x) &= \text{fresnel}_c(x) = \int_0^x \cos(\tfrac{\pi}{2}t^2)dt\end{aligned}\quad (1.14)$$

In questo modo risulta possibile usare le clotoidi solo come funzioni che collegano linee a circonferenze (curvatura iniziale zero), circonferenze a linee (invertendo gli estremi di integrazione, curvatura finale zero), ma non è possibile collegare circonferenze a circonferenze, tantomeno clotoidi a clotoidi.

Per completezza, mantenere  $\kappa_0$  porterebbe alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\int \cos(\tfrac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)ds &= \sqrt{\tfrac{\pi}{\sigma}} \left( \cos \tfrac{\kappa_0^2}{4\sigma} C\left(\tfrac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) + \sin \tfrac{\kappa_0^2}{4\sigma} S\left(\tfrac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) \right) \\ \int \sin(\tfrac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)ds &= \sqrt{\tfrac{\pi}{\sigma}} \left( \cos \tfrac{\kappa_0^2}{4\sigma} S\left(\tfrac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) - \sin \tfrac{\kappa_0^2}{4\sigma} C\left(\tfrac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) \right)\end{aligned}\quad (1.15)$$

Come ultima nota, esistono delle approssimazioni con funzioni razionali all'equazione della clotoide[Hea85].

### 1.3.6 Movimento senza variazioni di curvatura

Per completezza valutiamo quale sarebbero le equazioni del veicolo nel caso in cui le variazioni di curvatura non siano presenti o siano comunque trascurabili.

In questo caso le equazioni del moto sarebbero

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \theta_0 + \kappa s \\ \dot{x} &= \cos \theta(s) = \cos(\theta_0 + \kappa s) \\ \dot{y} &= \sin \theta(s) = \sin(\theta_0 + \kappa s)\end{aligned}\quad (1.16)$$

con  $\kappa$  costante. In questo caso gli integrali sono conosciuti e valgono:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int \cos \theta(s)ds = \frac{\sin(\theta_0 + \kappa \Delta s) - \sin(\theta_0)}{\kappa} \\ \Delta y &= \int \sin \theta(s)ds = \frac{\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0 + \kappa \Delta s)}{\kappa}\end{aligned}\quad (1.17)$$

o imponendo  $\theta_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int \cos \theta(s)ds = \frac{\sin(\kappa \Delta s)}{\kappa} \\ \Delta y &= \int \sin \theta(s)ds = \frac{1 - \cos(\kappa \Delta s)}{\kappa}\end{aligned}\quad (1.18)$$

Nel caso in cui  $\kappa = 0$  il sistema si riconduce al classico caso di moto rettilineo uniforme

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int \cos \theta_0 ds = \cos \theta_0 \Delta s \\ \Delta y &= \int \sin \theta_0 ds = \sin \theta_0 \Delta s\end{aligned}\quad (1.19)$$

### 1.3.7 Trasformazioni di coordinate

Le equazioni del movimento del centro di massa (o dell'asse posteriore) nel tempo valgono:

$$\begin{aligned}dx &= v \cos \theta dt \\ dy &= v \sin \theta dt \\ d\theta &= r dt\end{aligned}\quad (1.20)$$

Supponendo che all'inizio  $\theta_0 = 0$  e che nell'istante di tempo della simulazione lo *yawrate*  $r$  rimanga costante, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v}{r} \sin rt \\ y(t) &= \frac{v}{r} (1 - \cos rt) \\ \theta(t) &= rt\end{aligned}\quad (1.21)$$

Il cambio di sistema di riferimento pertanto si può modellare come puro spostamento e pura rotazione. Chiaramente il sistema a limite  $r \rightarrow 0$  tende a un moto rettilineo uniforme.

Abbiamo a questo punto a disposizione un centro di rotazione  $(x_r, y_r)$  istantaneo localizzato nel sistema di riferimento corrente, e un angolo  $\vartheta$  di variazione dello yaw. Prendiamo la matrice di rotazione, in modo da capire dove il generico punto  $(x, y)$  del mondo finisce rispetto al preesistente sistema di riferimento:

$$\begin{aligned}x' &= \cos \vartheta (x - x_r) - \sin \vartheta (y - y_r) + x_r = \cos \vartheta x - \sin \vartheta y + x_r(1 - \cos \vartheta) + y_r \sin \vartheta \\ y' &= \sin \vartheta (x - x_r) + \cos \vartheta (y - y_r) + y_r = \sin \vartheta x + \cos \vartheta y + y_r(1 - \cos \vartheta) - x_r \sin \vartheta\end{aligned}\quad (1.22)$$

### 1.3.8 Mondo tridimensionale

L'equazione (??) può essere generalizzata nel caso di veicolo che si muove in uno spazio tridimensionale. In questo sistema di riferimento è necessario conoscere l'orientazione del veicolo rispetto agli altri assi.

## 1.4 Dynamic Vehicle Model

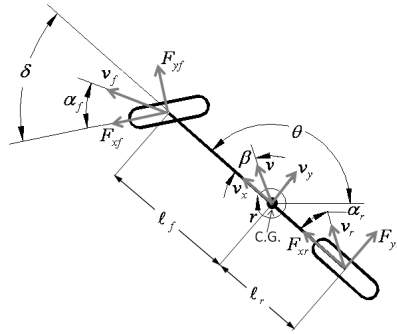


Figura 1.4: Dynamic Bicycle Model

Il modello del biciclo semplificato non tiene conto della dinamica e delle forze laterali effettive che incidono sul veicolo. L'ipotesi che è stata usata è che la velocità delle ruote (anteriori e posteriori) è diretta esattamente lungo la loro direzione. Quello presentato finora viene chiamato Modello Cinematico del veicolo. Ora viene presentato il modello dinamico. L'obiettivo è quello di ottenere un modello dinamico del veicolo, che poi linearizzato, fornisca una stima leggermente più accurata del moto del veicolo.

A velocità elevate, l'ipotesi che il vettore forza di ogni ruota sia nella direzione della ruota stessa, non è più valida [Raj06]. In questo caso, invece di un modello cinematico, deve essere introdotto un modello dinamico, il quale ha delle variabili interne in più con una loro dinamica dipendente dal tempo.

In figura 1.4,  $\delta$  è l'angolo delle ruote sterzanti,  $\mathbf{v}$  il vettore velocità del centro di massa (con le sue due componenti proiettate sull'asse del veicolo e perpendicolari ad esso),  $\beta$  è l'angolo di deriva (lo slip angle, l'angolo tra il vettore velocità e la direzione del veicolo) del centro di massa, e  $\alpha_f$  e  $\alpha_r$  l'angolo di deriva delle singole ruote (angolo tra il vettore velocità nelle ruote e l'angolo delle ruote stesso).

### 1.4.1 Ackermann Steering Model con deriva: Steady-State curve

Da sistemare: prima modello dinamico e poi Steady-State come approssimazione.

Tree coordinate bastano per descrivere il moto di un veicolo:  $X$ ,  $Y$  e  $\psi$ .  $(X, Y)$  sono le coordinate inerziali del centro di massa, mentre  $\psi$  descrive l'orientazione del veicolo. La velocità del centro di massa del veicolo è indicata con  $v$  e forma un angolo  $\beta$  rispetto all'asse longitudinale del veicolo stesso.

Il modello di veicolo a 3 parametri acquisisce il parametro  $\beta$ . La variabile  $\beta$  è la nuova variabile interna dipendente dal tempo e dal moto. Gli angoli  $\alpha_r$  e  $\alpha_f$  sono gli angoli che formano il vettore velocità delle singole ruote rispetto all'asse del veicolo. Istantaneamente il veicolo esegue una rotazione centrato nel punto di incontro della perpendicolare di tali velocità.

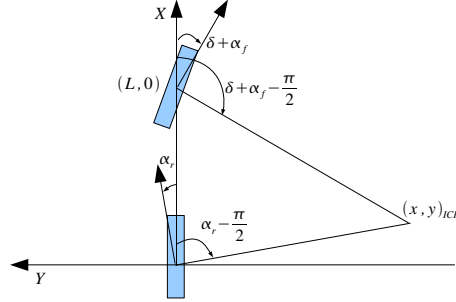


Figura 1.5: Centro di rotazione istantaneo.

Dall'analisi geometrica della figura 1.5 si evince che:

$$x_{ICR} = \frac{L}{1 - \cot \alpha_r \tan(\alpha_f + \delta)} \quad y_{ICR} = -\cot \alpha_r x_{ICR} \quad (1.23)$$

Eseguendo diverse semplificazioni (forzando per esempio  $R$  perpendicolare al veicolo nel centro di massa) si ottiene

$$\delta \simeq \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r \quad (1.24)$$

L'angolo  $\delta$ , necessario per affrontare una curva, ora è funzione non solo del raggio di curvatura  $R$  (misurato questa volta nel centro di massa), ma anche degli angoli di deriva delle singole ruote. Gli angoli  $\alpha_f$  e  $\alpha_r$  sono funzioni dalle forze laterali che agiscono sui rispettivi pneumatici.

L'angolo  $\beta$  viene chiamato angolo di deriva (*slip angle*) e rappresenta l'angolo fra l'asse del veicolo e la velocità di avanzamento  $\mathbf{v}$ :

$$\beta = \arctan \left( \frac{l_r}{\sqrt{R^2 - l_r^2}} \right) \quad (1.25)$$

La dinamica del veicolo è descritta da 3 equazioni di bilanciamento:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ \sum F_y &= ma_y \\ \sum \tau_x &= I_{xx} \alpha_x \end{aligned} \quad (1.26)$$

L'angolo  $\psi$  è chiamato *heading angle* del veicolo. L'angolo di spostamento diventa pertanto  $\gamma = \psi + \beta$ :

$$(\tan \delta_f - \tan \delta_r) \cos \beta = \frac{l_f + l_r}{R} \quad (1.27)$$

Si può approssimare lo yaw rate del veicolo, a velocità basse, con  $v/R$  ovvero

$$\dot{\psi} = \frac{v}{R} \quad (1.28)$$

ovvero

$$\dot{\psi} = \frac{v \cos \beta}{l_f + l_r} (\tan \delta_f - \tan \delta_r) \quad (1.29)$$

Le equazioni del moto diventano con questo angolo aggiuntivo  $\gamma = \delta + \beta$ :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= v \cos \gamma = v \cos(\psi + \beta) \\ \dot{Y} &= v \sin \gamma = v \sin(\psi + \beta) \\ \dot{\psi} &= \frac{v \cos \beta}{l_f + l_r} (\tan \delta_f - \tan \delta_r) \end{aligned} \quad (1.30)$$



Questo modello ha 3 ingressi:  $\delta_f$ ,  $\delta_r$  e  $v$ . L'angolo  $\beta$  può essere ricavato da

$$\beta = \arctan \left( \frac{l_f \tan \delta_r + l_r \tan \delta_f}{l_r + l_f} \right) \quad (1.31)$$

Questa equazione vale per il modello del biciclo.

Ipotizzando la strada piatta (non c'è un angolo di rollo), è possibile applicare la seconda legge di Newton lungo l'asse  $y$  del veicolo, ovvero la forza centrifuga applicata alla vettura  $F_c = mR\dot{\theta}^2 = m\frac{v_x^2}{R}$  sul centro di massa deve essere bilanciata dalla risposta laterale dei pneumatici [Gil92, Wid02]:

$$F_{yf} + F_{yr} = F_c = ma_y \quad (1.32)$$

dove  $a_y$  è l'accelerazione inerziale del veicolo nel centro di gravità in direzione dell'asse  $y$  e  $F_{yf}$ ,  $F_{yr}$  sono le forze laterali sulle gomme anteriori e posteriori. Nel caso di un veicolo formato da 4 ruote è necessario esprimere tutte le 4 forze, ma si possono supporre uguali le forze agenti sulle due ruote posteriori e anteriori e sommare in un unico termine ciascuna. Due termini contribuiscono ad  $a_y$ : l'accelerazione  $\ddot{y}$  dovuta al moto lungo l'asse delle  $y$  e l'accelerazione centripetra  $v_x\dot{\psi}$  ovvero  $a_y = \ddot{y} + v_x\dot{\psi}$ .

Per la conservazione del momento angolare:

$$I_z\ddot{\psi} = F_{yf}l_f - F_{yr}l_r \quad (1.33)$$

Per il Gillespie l'equazione sopra può essere approssimata per piccoli angoli e la cui soluzione fornisce:

$$F_{yr} = m\frac{l_f v_x^2}{LR} \quad F_{yf} = m\frac{l_r v_x^2}{LR} \quad (1.34)$$

e si ottiene l'equazione steady-state:

$$\begin{aligned} F_{yf} + F_{yr} &= m\frac{v_x^2}{L} \\ l_f F_{yf} &= l_r F_{yr} \end{aligned} \quad (1.35)$$

La risposta dei pneumatici (la *Tyre Stiffness*) è complessa e dipende da moltissimi fattori.

Risultati sperimentali mostrano che la forza laterale è proporzionale allo 'slip angle' per angoli piccoli. È infatti possibile definire anche uno 'slip angle' per pneumatico, ovvero l'angolo tra l'orientazione effettiva della ruota e la direzione del vettore velocità sulla ruota stessa:

$$\alpha_f = \delta_f - \theta_{fV} \quad (1.36)$$

dove  $\theta_{fV}$  è l'angolo del vettore velocità,  $\delta_f$  l'angolo della ruota e  $\alpha_f$  'slip angle'. Per l'angolo posteriore l'equazione è simile, con il valore  $\delta_r = 0$  imposto per costruzione.

In generale la risposta dei pneumatici si modella con una espansione in serie di Taylor (questi valori sono empirici, dipendenti da tantissimi parametri):

$$\begin{aligned} F_{yf} &= 2C_{\alpha f}\alpha_f \\ F_{yr} &= 2C_{\alpha r}\alpha_r \end{aligned} \quad (1.37)$$

esplicitando il contributo fornito dalle due ruote per asse. È possibile trovare questa relazione senza il 2 a denominatore, incorporato nella costante  $C$ . La quantità  $C_{\alpha f}$  è chiamata 'cornering stiffness'.

Le seguenti relazioni possono essere usate per calcolare  $\theta_{fV}$  e  $\theta_{rV}$ :

$$\tan \theta_{fV} = \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{\dot{x}} \quad (1.38)$$

$$\tan \theta_{rV} = \frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{\dot{x}} \quad (1.39)$$

Per piccoli angoli  $\tan \theta \approx \theta$ .

Unendo tutte queste relazioni tra loro si ottiene:

Due termini contribuiscono alle accelerazioni

Il modello a 2 DOF, il modello a 3 DOF o i modelli a gradi di libertà superiori. Il modello a 7 parametri tiene conto della dinamica verticale del veicolo. In questo caso le forze verticali agenti sulle ruote cambiano nel tempo.

Il modello a 2 DOF con slip angle e yaw rate o velocità laterale e yaw rate.

Il modello a 3 DOF con slip angle, yaw rate, roll angle.

Siano  $F_x$  e  $F_y$  le forze longitudinali e laterali che agiscono sul centro di gravità del veicolo. Allo stesso modo  $F_{x_i}$  e  $F_{y_i}$  le forze longitudinali e laterali che agiscono sulle ruote, rispetto alla direzione del veicolo in relazione con  $F_l$  e  $F_c$ . forze longitudinali e laterali sulle ruote, in rispetto alla direzione della ruota stessa:

$$\begin{aligned} F_y &= F_l \sin \delta + F_c \cos \delta \\ F_x &= F_l \cos \delta - F_c \sin \delta \end{aligned} \quad (1.40)$$

Si ipotizza un carico costante su tutte le ruote (per esempio non si tiene conto dei fenomeni che accadono quando il veicolo accelera o rallenta, spostando a causa del momemnto di inerzia, il peso tra il davanti e il dietro del veicolo). In questo caso  $F_{zf,l}$ ,  $F_{zf,r}$ ,  $F_{zr,l}$ ,  $F_{zr,r}$  sono supposti costanti nel tempo.  $F_z$ , il carico normale per ruota (?).

Il modello dinamico, per il modello a 4 ruote, assume pertanto questi 3 vincoli (modello a 3 gradi di libertà)

L'idea e' quella di calcolare la derivata prima di  $v_y$  e  $r$  in funzione di  $v_y$  ed  $r$  solamente. Equazione con già la proiezione delle forze sugli assi corretti

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} - \dot{y}\dot{\psi}) &= -F_{xf} \cos \delta_f + F_{yf} \sin \delta_f + F_{xr} \\ m(\ddot{y} + \dot{x}\dot{\psi}) &= F_{yf} \cos \delta_f - F_{xf} \sin \delta_f + F_{yr} \\ I_z \ddot{\psi} &= l_f(F_{yf} \cos \delta_f - F_{xf} \sin \delta_f) - L_r F_{yr} \end{aligned} \quad (1.41)$$

con gli F relativi alla ruota anteriore contribuiti diretti nella sua direzione (vedi figura). Ovvero, supponendo  $F_{xr} = F_{xf} = 0$  :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{F_{yf}}{l_f} \cos \delta_f + \frac{F_{yf}}{r} \sin \delta_f - \dot{x}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} &= \frac{l_f}{I_z} F_{yf} \cos \delta_f - \frac{L_r}{I_z} F_{yr} \end{aligned} \quad (1.42)$$

solito modello lineare (Ok, 2 ruote compattate in una):

$$\begin{aligned} F_{yf} &= -C_{\alpha f} \alpha_f \\ F_{yr} &= -C_{\alpha r} \alpha_r \end{aligned} \quad (1.43)$$

bla bla bla si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \mathbf{B} \delta_f \quad (1.44)$$

Moto del centro di gravità:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x} \cos \psi - \dot{y} \sin \psi \\ \dot{Y} &= \dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi \\ \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (1.45)$$

2 DOF

Un modello semplificato

$$\begin{aligned} m a_y &= F_{yf} \cos \delta_f + F_{yr} \\ I_z \dot{r} &= l_f F_{yf} \cos \delta_f - l_r F_{yr} \end{aligned} \quad (1.46)$$

e lo slip angle  $\beta$  approssimato come

$$\beta = \arctan \left( \frac{u_y}{u_x} \right) \approx \frac{u_y}{u_x} \quad (1.47)$$

Altrimenti:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= m \dot{y} \dot{\psi} + F_{xf,l} + F_{xf,r} + F_{xr,l} + F_{xr,r} \\ m \ddot{y} &= -m \dot{x} \dot{\psi} + F_{yf,l} + F_{yf,r} + F_{yr,l} + F_{yr,r} \\ I_z \ddot{\psi} &= l_f(F_{yf,l} + F_{yf,r}) - r_f(F_{yr,l} + F_{yr,r}) + \frac{B}{2}(-F_{xf,l} + F_{xf,r} - F_{xr,l} + F_{xr,r}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Il moto del centro di massa del veicolo, in coordinate assolute, è

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi \\ \dot{X} &= \dot{x} \cos \psi - \dot{y} \sin \psi \end{aligned} \quad (1.49)$$

Esperimenti mostrano che in prima approssimazione queste forze sono proporzionali allo 'slip-angle'.

L'angolo di scorrimento per pneumatico  $\alpha$  è l'angolo tra la direzione della ruota e la direzione della ruota stessa, come

$$\alpha = \arctan \frac{v_c}{v_l} \quad (1.50)$$

$$F_{yf} = C_{\alpha f}(\delta - \theta_{Vf}) \quad (1.51)$$

Il peso è distribuito in ugual misura davanti e dietro secondo l'equazione

$$F_{zf} = \frac{l_f mg}{2(l_f + l_r)} \quad F_{zr} = \frac{l_r mg}{2(l_f + l_r)} \quad (1.52)$$

divisa per ruota. In questo caso si può usare la formula magica del pneumatico (*Magic Formula tire model*).

Altri fenomeni è la latenza che impiega il pneumatico ad esercitare la forza.

Saltando la trattazione (si può trovare in tantissimi articoli, per esempio in [YRG03]) che solitamente viene fatta in questa fase, si arriva ad ottenere un sistema del tipo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\delta(t) \quad (1.53)$$

dove vengono linearizzate tutte le componenti. Tale modello è valido per velocità elevate ma per angoli di deriva piccoli e per regioni lineari di risposta del pneumatico.

È da notare che alcuni articoli mostrano come sia possibile usare la velocità laterale  $v_y$  come parametro interno, piuttosto che  $\beta$ .

Lo stesso rajamani dopo aver mostrato l'equazione dinamica in funzione di velocità laterale e yawrate la esprime in funzione dello slip-angle e yawrate.

Equazione dinamica slip angle e yaw rate che cita W.F. Milliken and D.L. Milliken Race Car Vehicle Dynamics, SAE International, ISBN: 1560915269, August 1995.

### 1.4.2 Steady-State: SottoSterzo e Sovrasterzo

È possibile sviluppare un modello cinematico leggermente migliore, tenendo conto della dinamica del veicolo, ma trascurando l'angolo di deriva (modello *Steady-State*). In letteratura [Wid02, Raj06, Won01] viene mostrato come arrivare all'equazione della curvatura 1.1 in presenza di sottosterzo o sovrasterzo dovuto all'interazione tra le ruote e la strada. Dall'equazione 1.24 si ottiene

$$\delta(s) = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{L}{R} + K_V \frac{v_x^2}{R} \quad (1.54)$$

o

$$\kappa(s) = \frac{\delta(s)}{L + K_V v_x^2} \quad (1.55)$$

dove si linearizzano i contributi introdotti dalla velocità  $v_x$  alla traiettoria eseguita dal veicolo. Il coefficiente  $K_V$  è il gradiente di sottosterzo, con  $K_V > 0$  sottosterzante,  $K_V = 0$  neutro e  $K_V < 0$  sovrasterzante.

Per i veicoli sovrasterzanti è anche possibile stimare una velocità critica, sopra la quale il veicolo diventa ingovernabile:

$$v_{crit} = \sqrt{-\frac{L}{K_V}} \quad (1.56)$$

### 1.4.3 Determinazione dei parametri del veicolo

Dall'equazione 1.55 e dal fatto che  $\delta(s) = f(\delta_w(s))$  dove solitamente  $f$  non è conosciuta in forma chiusa, si può dire che esiste una equazione generica  $k$  tale che

$$\kappa(s) = k(\delta_w(s), v_x(s)) \quad (1.57)$$

tale equazione può essere generata con spline o con espansione in serie, partendo per esempio dalle informazioni prodotte da un sensore di yaw-rate  $r = \partial\theta/\partial t$ .

Sia  $r$  il valore di yaw-rate<sup>1</sup> tale che  $t = \frac{2\pi}{r}$  tempo necessario per eseguire una rivoluzione completa su una circonferenza di perimetro  $s = 2\pi R = v_x t = \frac{2\pi}{r} v_x$  per cui

$$\kappa = \frac{r}{v_x} \quad r = \kappa v_x \quad (1.58)$$

ovvero, in forma differenziale:

$$k(\delta_w, v_x) = \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{v_x} \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (1.59)$$

Siccome tale relazione vale sempre, è sempre possibile stimare  $r$  dalla conoscenza di  $\kappa$ , spostando il problema della conoscenza di  $\kappa$  dalla conoscenza di  $r$ .

Dall'equazione 1.58 e da 1.55 è possibile calcolare il sistema lineare omogeneo

$$Lr + K_{us}v_x^2r - m_0v_x - \delta_w m_1 v_x - \delta_w^3 m_3 v_x = 0 \quad (1.60)$$

avendo usando una espansione in serie di Taylor  $\delta = -\tan\delta_0 + \delta_w m_1 + \delta_w^3 m_3$ . che minimizzato ritorna i parametri richiesti

Il secondo metodo per stimare  $\kappa$  si basa sulla considerazione che anche l'accelerazione laterale  $a_y = \frac{v_x^2}{R} = v_x^2 k$  è funzione della curvatura:

$$\kappa(\delta_w, v_x) = \frac{a_y}{v_x^2} \quad (1.61)$$

<sup>1</sup>È da notare che  $r$  sono  $rad/s$ , mentre  $k$  sono  $rad/m$

Un ultima tecnica per calcolare la curvatura eseguita dal veicolo consiste nell'utilizzare la differenza di velocità delle ruote sullo stesso asse del veicolo stesso, in quanto esse percorrono nello stesso tempo circonferenze di raggio differente. La velocità di ogni punto del veicolo dipende dalla distanza dal centro di rotazione istantaneo:

$$\vec{v}_i = \vec{r} \times \vec{R}_i \quad (1.62)$$

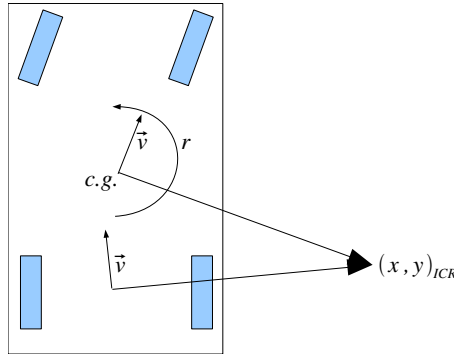


Figura 1.6: Centro di massa istantaneo e vettori velocità.

In condizione di deriva trascurabile, la differenza di velocità tra le due ruote posteriori (non sterzanti) vale

$$\Delta v = Br \quad (1.63)$$

e di conseguenza:

$$k = \frac{2}{B} \frac{v_o - v_i}{v_o + v_i} \quad (1.64)$$

Da notare l'indipendenza di  $k$  dall'unità con cui  $v$  è misurata. Questa relazione vale per le ruote posteriori: le ruote anteriori sterzanti ruotano a una velocità dipendente anche dall'angolo di sterzata (la proiezione del vettore velocità tangente) e perciò meno fruibile.

L'ultimo metodo che si può valutare è usare un GPS sufficientemente preciso per calcolare  $R$  direttamente.

## 1.5 Momento di Inerzia

Uno laterale durante le curve che coinvolge principalmente l'angolo di rollio, e uno longitudinale durante l'accelerazione e le frenate che coinvolge l'angolo di beccheggio.

L'angolo di imbardata del veicolo è espressione diretta invece delle forze delle gomme sul terreno che attuano l'effettiva rotazione del mezzo.

## 1.6 Forze che agiscono sul veicolo

Aerodynamic drag, Aerodynamic lift (forza che spinge verso l'alto il veicolo, differente dal davanti e dal dietro)

Vertical vibration (?)

BRaking force, Vertical Force, Lateral Force, Motive Force (solo sulle ruote motrici)

## 1.7 Argomenti Avanzati

Moto in salita o discesa

Effetti del vento, in rettilineo e in curvatura (aerodynamic drag force)

Effetti da road bank angle:  $m\ddot{y} = F_{yr} + F_{yf} + F_{bank}$ .

## 1.8 Longitudinal Vehicle Dynamics

Quando il veicolo è in condizioni ideali di moto rettilineo uniforme e il motore riesce ad erogare abbastanza coppia la velocità del veicolo è direttamente proporzionale alla velocità angolare delle ruote

$$V_x = r_{eff} \omega_w \quad (1.65)$$

Il transiente tuttavia, quando  $a_x \neq 0$ , presenta diverse considerazioni. Tali valori sono importanti perchè quando la coppia fornita dal motore viene controbilanciata dalle forze esterne il veicolo non cambierà la velocità e non arriverà mai alla velocità desiderata. Quando le forze che agiscono sul veicolo bilanciano la forza di trazione prodotta dal motore il veicolo smetterà di accelerare. Tale posizione è ovviamente dinamica e dipende dallo stato precedente del sistema.

Resta il fatto che la velocità del motore, anche trascurando la presenza di eventuali riduttori (es. cambio), deve variare in maniera continua e tale variazione è limitata dalla centralina del motore.

Se si analizza il moto di un veicolo su un generico piano inclinato la compensazione delle forze fornisce

$$ma = F_{xf} + F_{xr} - F_{aero} - R_{xf} - R_{xr} - mg \sin \theta \quad (1.66)$$

ovvero

$$ma = F_x - R_x - F_{aero} \quad (1.67)$$

dove  $F_x$  sono le forze complessive longitudinali applicate dalle ruote,  $R_x$  è la resistenza al rotolamento e  $F_{aero}$  la *Aerodynamic Drag Force*.

L'*Aerodynamic Drag Force*  $F_{aero}$  viene solitamente modellata come

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_F (V_x + V_{wind})^2 = D_a (V_x + V_{wind})^2 \quad (1.68)$$

Questo fattore si può stimare attraverso un *coast-down test*.

Le forze longitudinali sulle ruote (*longitudinal tire forces*)  $F_{xf}$  e  $F_{xr}$  dipendono da diversi fattori. Sono differenti in accelerazione o decelerazione e sono funzioni lineari della velocità in accelerazione, e inversamente proporzionali in frenata. Queste forze sono le forze primarie che contribuiscono alla trasmissione della potenza dal motore al moto del veicolo.

La resistenza al rotolamento  $R_{xf}$  e  $R_{xr}$  sono anche essa funzione di diversi fattori, compresa la velocità del veicolo, la resistenza areodinamica, l'inclinazione della strada. In prima approssimazione si può dire che tali valori siano proporzionali alle forze normali che vengono applicate su ogni ruota:

$$R_{xf} + R_{xr} \propto F_{zf} + F_{zr} = C_{roll} mg \quad (1.69)$$

dove  $f$  è definito come *rolling resistance coefficient*. Essendo la forza normale questa è influenzata da diversi fattori oltre al peso della vettura, tra i quali inclinazione della strada, beccheggio del veicolo, spinta areodinamica verso il basso e altre.

Modello a N parametri (Rollio)

In condizioni perfette di non slittamento della ruota, la differenza tra la velocità del veicolo e la velocità di rotazione delle ruote è imprigionata elasticamente nel pneumatico.

La differenza tra la velocità longitudinale del veicolo  $V_x$  e la velocità equivalente  $r_{eff} \omega_w$  è chiamata *Longitudinal Slip*. La *longitudinal slip ratio* è definita come

$$\sigma_x = \frac{r_{eff} \omega_w - V_x}{V_x} \quad (1.70)$$

durante la frenata, mentre

$$\sigma_x = \frac{r_{eff} \omega_w - V_x}{r_{eff} \omega_w} \quad (1.71)$$

durante l'accelerazione.

Il raggio efficace della ruota  $r_{eff}$  dipende dalla forza normale applicata sulla ruota e dal raggio a riposo.

Quando il rapporto è basso si ottiene che la forza applicata sulle ruote è proporzionale al rapporto:

$$\begin{aligned} F_{xf} &= C_{\sigma f} \sigma_{xf} \\ F_{xr} &= C_{\sigma r} \sigma_{xr} \end{aligned} \quad (1.72)$$

dove  $C_{\sigma f}$  e  $C_{\sigma r}$  sono chiamati parametri della *longitudinal tyre stiffness* delle ruote anteriori e posteriori rispettivamente.

### 1.8.1 Modello semplificato

La decelerazione di un veicolo alla velocità  $v$  dipende dalla resistenza areodinamica e dagli attriti del sistema. È possibile pertanto con una espansione in serie di Taylor, nel caso di veicolo in folle e di moto pianeggiante eseguire il *coast-down test*:

$$a = \frac{dv}{dt} = k_2 v^2 + k_1 v + k_0 \quad (1.73)$$

da cui consegue che

$$\int a dv = \frac{\arctan \left( \frac{k_2 v + \frac{1}{2} k_1}{\Delta} \right)}{\Delta} \quad (1.74)$$

da cui

$$v = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{k_2 v_0 + \frac{1}{2}k_1}{\Delta}\right) + t\Delta\right) \Delta - \frac{1}{2}k_1}{k_2} \quad (1.75)$$

avendo indicato con  $\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{4k_0k_2 - k_1^2}$ .

Il caso più comune  $k_0 = 0$  semplifica il problema:

$$v = \frac{v_0 k_1}{e^{-tk_1} k_2 v_0 + e^{-tk_1} k_1 - k_2 v_0} \quad (1.76)$$

con  $v_0$  la velocità iniziale.

Infine il caso limite  $k_1 = 0$

$$v = \frac{v_0}{1 - k_2 v_0 t} \quad (1.77)$$

Nel caso di accelerazione si può approssimare

$$\frac{dv}{dt} = k e^{-\tau t} \quad (1.78)$$

da cui

$$v = k \frac{1 - e^{-\tau t}}{\tau} + v_0 \quad (1.79)$$

da cui a limite

$$\frac{k}{\tau} = v_1 - v_0 \quad (1.80)$$

DRAFT

## Capitolo 2

# Vehicle Positioning

La fusione dei dati inerziali con dati provenienti da altri sensori (GPS per esempio) permette di localizzare il veicolo in maniera precisa all'interno dell'ambiente.

Il moto di un oggetto nello spazio è descritto da tre posizioni e tre orientazioni. Assumendo che l'oggetto sia un corpo rigido

In quasi tutti gli aspetti dei sistemi di navigazione....

## 2.1 Sistemi di Riferimento

### 2.1.1 Sistema di riferimento Inerziale

Il sistema di riferimento inerziale, o i-frame, è il principale sistema di riferimento in geodesica, centrato con il centro della Terra e allineato con le stelle fisse (Earth Centered Inertial Frame, ECI).

### 2.1.2 Sistema di Riferimento Earth-Centered-Earth-Fixed

ECEF, o e-frame, è fissato con la Terra e ha la sua origine nel centro della Terra stessa. L'asse x è orientato lungo il meridiano di Greenwich e l'asse z è rivolto verso il polo nord. L'asse y completa la terna attraverso la legge della mano destra. Un punto nel sistema di riferimento ECEF può essere visto sia in coordinate cartesiane (x,y,z) che coordinate ellissoidali (latitudine geodetica, longitudine geodetica e altezza dall'ellissoide).

### 2.1.3 Sistema di Riferimento WGS-84

Longitude, Latitude e altezza sul livello medio del mare.

### 2.1.4 Sistema di Riferimento Navigazione

n-frame o local frame l-frame: 1 asse che punta nord, un asse che punta est e un asse che punta in alto (left handed) NED o in basso (right handed) ENU/NEU.

### 2.1.5 Sistema di Riferimento Veicolo

Il Body Frame, b-frame, x punta in fronte al veicolo, y punta a destra e z in basso e di conseguenza le definizioni di yaw, pitch e roll.

Altrimenti x punta in fronte, y punta a sinistra e z in alto.

### 2.1.6 Sistema di Riferimento Sensore

## 2.2 Sensori Inerziali

Il sensore inerziale è caratterizzato da diversi parametri, una parte coinvolti dell'interpretazione del segnale oltre a quelli di posizionamento. I sensori inerziali devono convertire, soprattutto i MEMS, il segnale inerziale in un segnale digitale per essere processato dal calcolatore. Questa conversione raramente è lineare.

### 2.2.1 Accelerometro

Un accelerometro misura tutti i tipi di accelerazioni che vengono dalla gravitazione o dal veicolo.

### 2.2.2 Giroscopio

### 2.2.3 Errori

Noise Bias Scale Factor Scale factor asymmetry Acceleratin sensitive terms Input axis misalignment System misalignment  
Gli errori del giroscopio e dell'accelerometro dipendono dal bias, dal fattore di scala e dall'isallineamento delle componenti. Oltre a questo è presente rumore.

Fattore di scala e bias possono essere tempo varianti, portando l'equazione a

$$\tilde{x}(t) = s_x(t)x(t) + b_x(t) \quad (2.1)$$

In generale, più che tempo varianti, sono principalmente varianti in base alla temperatura, specialmente i MEMS. Una parte dipende dalla temperatura, una dal tempo.

### 2.2.4 Odometria

Attraverso l'analisi delle ruote del veicolo è possibile stimare la velocità e la rotazione eseguita dal veicolo. Questi valori non sono di fatto rappresentativi di un sensore inerziale, ma possono essere affetti da slittamento.

L'equazione che lega la variazione della velocità delle ruote in un veicolo e lo yaw-rate è

$$r = \frac{1}{B} (v_r - v_l) \quad (2.2)$$

e la velocità del centro di massa

$$v = \frac{1}{2} (v_r + v_l) \quad (2.3)$$

Dall'analisi differenziale della velocità delle ruote è possibile stimare in maniera compatta velocità longitudinale e angolare:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{B} & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dove  $r$  viene stimata positiva in senso antiorario.

Da queste equazione è possibile creare una osservazione del tipo

$$\begin{aligned} v_r &= v + Br/2 \\ v_l &= v - Br/2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Gli errori nell'odometria sono nell'errata stima del raggio della ruota e nella misura della distanza tra il punto di contatto delle ruote appartenenti allo stesso asse:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{v+B(1+\zeta_B)r}{2(1+\zeta_r)} \\ v_l &= \frac{v-B(1+\zeta_B)r}{2(1+\zeta_l)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

La velocità delle ruote anteriori è alterata dall'angolo di sterzo tale che

$$v_r - v_l = rB \cos \delta \quad (2.7)$$

La presenza dello slip-angle fa cambiare leggermente l'equazione della velocità delle singole ruote (la velocità longitudinale del centro di massa infatti si riduce a  $v \cos \beta$ ), ma mantiene inalterato il contributo differenziale.

### 2.2.5 Calibrazione Statica

Viene misurato l'output dei sensori in condizioni statiche. In questo caso il bias del giroscopio viene facilmente rimosso, mediando le letture su un intervallo di tempo sufficiente.

L'accelerometro invece deve mostrare che  $\|\mathbf{a}\| = g$ . In questo caso, per risolvere il problema è necessario porre l'accelerometro in 6 pose differenti per calibrare adeguatamente il sensore.

### 2.2.6 Calibrazione Dinamica

Per natura, i sensori MEMS possono variare gli errori in maniera dinamica nel tempo, principalmente a causa della temperatura.

Nello stato di Kalman è possibile introdurre come variabili nascoste tutte quelle che riguardano gli errori sul sistema stesso.



## 2.3 GPS

## 2.4 Varianza di Allan

Un problema che si incontra nell'analisi di sensori inerziali è riuscire a stimare se il valor medio di un dato segnale subisca un cambiamento nel tempo e con quale frequenza. David Allan ha affrontato questo problema per la stabilità degli orologi dei GPS definendo così un metodo chiamato *Allan Variance* (*AVAR*). Questa tecnica permette di stimare quanto il valor medio di un segnale cambia nel tempo a diversi valori di integrazione.

Data una sequenza sufficientemente lunga in cui un determinato segnale viene campionato, questa può sempre essere divisa in parti lunghe  $\tau$  secondi. Da ogni parte è possibile estrarre la media  $\mu_{i,\tau}$  e dal confronto della variazione delle medie successive è possibile ottenere una misura:

$$\text{AVAR}^2(\tau) = \frac{1}{2(n_\tau - 1)} \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1,\tau} - \mu_{i,\tau})^2 \quad (2.8)$$

Al cambiare di  $\tau$  cambia il valore della varianza ed è pertanto possibile graficare AVAR in funzione di  $\tau$ .

Con tempi di integrazione piccoli la varianza di Allan è dominata dal rumore del sensore. Integrando su tempi più lunghi la varianza diminuisce, fino a un certo punto in cui la varianza ricomincia a salire. Questo comportamento è dovuto alla presenza del rumore di *Random Walk* (*RRW*) del sensore. Il valore di *bias instability*, per definizione, è il punto più basso della curva della varianza di Allan.

## 2.5 Fusione GPS e Inerziale

### 2.5.1 Uncoupled Systems

GPS e INS lavorano separatamente. L'inerziale viene usato per restituire una posizione a un frame rate più elevato che con il GPS, partendo dall'ultimo dato GPS arrivato.

### 2.5.2 Loosely Coupled Integration

L'uscita del GPS (con presenza di rumore colorato) viene fusa con i dati inerziali e vengono stimati gli errori del sistema inerziale. Rumore Colorato dal GPS.

### 2.5.3 Tightly Coupled Integration

Richiede l'output degli pseudointervalli e fasi del GPS.

### 2.5.4 Direct Integration

### 2.5.5 Indirect Integration

## Capitolo 3

# Elementi di analisi per controllo veicoli

Valgono gli stessi elementi di analisi mostrati nel libro di visione artificiale. Oltre a questi bisogna mostrare alcune equazioni di curve utili per la cinematica diretta o inversa di veicoli.

### 3.1 La trasformata Z

La *trasformata Z* costituisce il metodo matematico di base per trasformare il segnale campionato in una equazione numerica iterativa, nota come equazione alle differenze finite, facilmente implementabile su computer. Si vedrà, inoltre, che esiste una relazione tra trasformata di Laplace e *trasformata Z* per cui si potrà operare una trasformazione tra segnali tempo-continui in segnali tempo-discreti. In questo modo, ad esempio, una funzione tempo-continuo di un filtro passa-basso si potrà trasformare in una equazione alle differenze finite e quindi si potrà realizzare un filtro passa-basso digitale con le stesse caratteristiche di quello analogico. La differenza sta ovviamente nel fatto che quello analogico è realizzato da un circuito hardware mentre quello digitale è realizzato mediante un software.

Si consideri una funzione tempo-continua  $f(t)$  per  $t > 0$ . Indichiamo con  $f^*(t)$  la funzione nel tempo ottenuta dal campionamento della funzione  $f(t)$  da impulsi di Dirac di ampiezza unitaria e durata infinitesima e periodo  $T_c$ .

**Definizione 1** La  $f^*(t)$  si può scrivere:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_c) \delta(t - nT_c) \quad (3.1)$$

La frequenza  $f_c = 1/T_c$  è detta *frequenza di campionamento* e deve rispettare il teorema di Shannon. Pertanto deve essere:  $f_c > 2f_{max}$ . Dove con  $f_{max}$  si è indicata la massima frequenza contenuta nel segnale da campionare  $f(t)$ .

La trasformata di Laplace del segnale campionato  $f^*(t)$ , avendo posto  $z = e^{sT_c}$  si scrive come

$$F(z) = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_c) \cdot z^{-n} \quad (3.2)$$

ed è la trasformata Z del segnale campionato  $f^*(t)$

La trasformata Z gode delle seguenti proprietà, totalmente equivalenti alle proprietà della trasformata di Laplace:

**linearità** La trasformata di una combinazione lineare di due o più funzioni è uguale alla combinazione lineare delle trasformate delle singole funzioni.

$$Z[Af_1(n) + Bf_2(n)] = AF_1(z) + BF_2(z)$$

**ritardo** se  $F(z)$  è la trasformata della funzione  $f(n)$ , la trasformata della funzione ritardata di  $K$  unità vale:

$$Z[f(n - k)] = z^{-K} \cdot F(z)$$

**valore iniziale**

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

**valore finale**

$$f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \cdot F(z) \right)$$

### 3.1.1 I filtri digitali

I filtri digitali, noti anche come *filtri numerici*, operano su sequenze numeriche per generare una nuova sequenza numerica. I filtri digitali si possono classificare in due categorie:

- Filtri a risposta infinita IIR (Infinite Impulse Response)
- Filtri a risposta finita FIR (Finite Impulse Response)

Nei filtri **ricorsivi** IIR il segnale di uscita è ottenuto come combinazione lineare di un numero **limitato** di segnali di ingresso e di uscita. Ovvero:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_n \cdot x(n-i) - \sum_{i=1}^M b_n \cdot y(n-i) \quad (3.3)$$

dove si vede che il contributo all'uscita corrente dipende sia dalla storia passata degli ingressi, ma anche dalla storia passata delle uscite. La risposta all'impulso di Dirac è una sequenza che tende asintoticamente a zero.

Nei filtri **non ricorsivi** FIR l'uscita dipende solo dalla storia passata degli ingressi:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_n \cdot x(n-i) \quad (3.4)$$

La risposta all'impulso di Dirac è una risposta che diventa comunque zero dopo un tempo finito.

La conversione dal dominio di Laplace  $s$  (continuo) a quello della trasformata  $z$  (discreto) e viceversa si ottiene attraverso la relazione  $z = e^{sT_c}$  e la sua inversa  $s = \frac{1}{T_c} \ln z$ , dove  $T_c$  è il tempo di campionamento in secondi.

Essendo tuttavia tale sostituzione complessa da eseguire, per ottenere un filtro digitale si parte comunque dalla trasformata di Laplace di un filtro analogico e, attraverso una trasformazione approssimata, si arriva alla Trasformata Zeta. Allo stesso modo se si applica la trasformazione  $z = e^{j\omega T_c}$  è possibile limitare la trasformata al cerchio unitario e poter lavorare così in frequenza come trasformata tempo-discreto di Fourier (DTFT).

Una di queste tecniche di trasformazione approssimata è la trasformazione bilineare che si ricava integrando le equazioni differenziali mediante il metodo dei trapezi (di Eulero). Un filtro digitale  $H(Z)$  deriva da un filtro analogico  $H(s)$  con la seguente sostituzione (e l'inversa):

$$s \rightarrow \frac{2}{T_c} \frac{z-1}{z+1} \quad z \rightarrow \frac{2+sT_c}{2-sT_c} \quad (3.5)$$

questa sostituzione ha diversi pregi (conserva la stabilità del filtro analogico per esempio) e la mappatura del piano  $s$  in  $z$  è quantomeno univoca.

### 3.1.2 Funzione di Trasferimento per funzioni tempo discreto

Sia il *Linear Constant Coefficient Difference* rappresentante l'evoluzione del sistema

$$\sum_{p=0}^N y[n-p]\alpha_p = \sum_{q=0}^M x[n-q]\beta_q \quad (3.6)$$

normalmente normalizzato con  $\alpha_0 = 1$ , in modo da poter scrivere la funzione di trasferimento come

$$y[n] = \sum_{q=0}^M x[n-q]\beta_q - \sum_{p=1}^N y[n-p]\alpha_p \quad (3.7)$$

in modo da esplicitare l'uscita corrente  $y[n]$  in funzione degli ingressi e delle uscite passate.

La trasformata Z dell'equazione (3.6) é

$$Y(z) \sum_{p=0}^N z^{-p}\alpha_p = X(z) \sum_{q=0}^M z^{-q}\beta_q \quad (3.8)$$

da cui la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{q=0}^M z^{-q}\beta_q}{\sum_{p=0}^N z^{-p}\alpha_p} \quad (3.9)$$

La funzione di trasferimento può essere scritta anche nella forma di poli-zero:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=0}^M (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{j=0}^N (1 - p_j z^{-1})} \quad (3.10)$$

## 3.2 Modellazione di Black Box

Vettore di ingressi  $\mathbf{u}(t)$  variabile in uscita  $y(t)$

Impulse model FIR model IIR model

## 3.3 Curve di Bézier

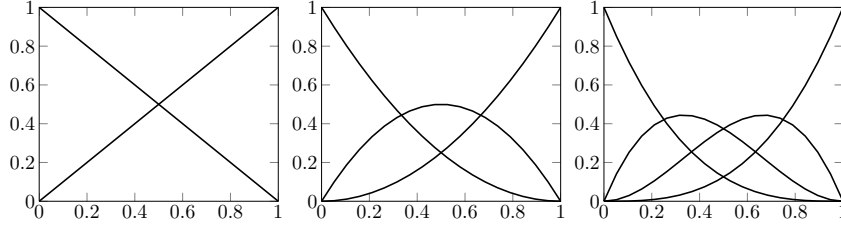


Figura 3.1: Esempi di basi di Bernstein, dal primo al terzo ordine.

Le curve di Bézier sono una particolare classe di curve interpolanti, dove il rapporto tra i punti di controllo e la forma rende abbastanza intuitiva la generazione della curva stessa. La curva è totalmente contenuta nell'involuppo convesso dei punti di controllo.

Siano  $b_{i,n}(t)$  basi di Bernstein

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad (3.11)$$

Una curva di Bézier di ordine  $k$  è definita da  $k$  punti di controllo, una curva di Bézier è costruita come somma pesata dei polinomi di Bernstein con i punti di controllo  $P_i$ :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t) \quad (3.12)$$

La curva interpolante passa per i soli punti  $P_0$  e  $P_n$  mentre non c'è nessuna garanzia che passi per i restanti punti.

La valutazione delle curve di Bézier si può fare in maniera ricorsiva:

$$\begin{aligned} \beta_i^{(0)}(t) &= P_i \\ \beta_i^{(j)}(t) &= \beta_i^{(j-1)}(1-t) + \beta_{i+1}^{(j-1)}t \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il concetto di interpolare funzioni interpolanti è chiamato algoritmo di *de Casteljau* e permette un metodo stabile dal punto di vista numerico per valutare i punti della curva e della sua tangente.

## 3.4 Spline

Dal punto di vista matematico le Spline sono menzionate per la prima volta da Isaac Jacob Schoenberg nel 1946.

Le funzioni *spline* sono funzioni polinomiali definite a tratti: per un intervallo delimitato la funzione *spline* assume esattamente l'equazione di un polinomio e per tratti diversi può essere che tale polinomio abbia parametri differenti. Nei punti di raccordo tra i diversi tratti la funzione *spline* assume un grado di *smoothness* elevato.

Le funzioni *spline* possono essere usate sia per interpolare dati che per eseguire regressioni a curve di grado limitato.

Una *spline* può essere definita come una funzione

$$S : [t_0, t_k] \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.14)$$

dove l'intervallo  $[t_0, t_k]$  può essere scomposto in  $k$  sottointervalli  $[t_0, t_1] \dots [t_{k-1}, t_k]$ . Gli elementi  $\{t_i\}$  sono chiamati *break-points*. All'interno di ogni intervallo  $[t_{i-1}, t_i]$  la funzione  $s(t)$  coincide con quella di un polinomio  $p_i(t)$ . Il grado più elevato di tutti questi polinomi definisce il grado della spline. Per questa ragione  $S(t) \in \mathcal{C}^{n-1}[t_0, t_k]$ . È altresì diffuso indicare una *spline* di grado  $n$ , ovvero formata da polinomi di grado  $n$ , come *spline* di ordine  $n+1$ .

Una *spline* è definita pertanto da  $n+1$  parametri per ognuno dei  $k$  polinomi, uno per ognuno dei  $k$  intervalli, per un totale di  $k(n+1)$  incognite.

Per permettere il grado di *smoothness* elevato, una *spline* di grado  $n$  è una funzione continua differenziabile fino al grado  $n-1$  su tutti i punti interni e sul limite dell'intervallo le derivate fino al grado  $n-1$  devono essere uguali. Questo requisito impone i seguenti vincoli  $n(k-1)$

$$p_{i-1}^{(j)}(t_i) = p_i^{(j)}(t_i) \quad (3.15)$$

con  $j = 0, \dots, n-1$  e  $i = 1, \dots, k-1$ .

Le funzioni *spline* interpolanti si costruiscono usando come dato in ingresso il valore  $c_i$  con  $i = 0, \dots, n$  che tali funzioni devono avere nei limiti degli intervalli (*knots*), fornendo di fatto  $k+1$  vincoli:

$$c_i = S(t_i) = p_i(t_i) \quad (3.16)$$

Nel complesso ci sono più incognite che vincoli: i restanti  $n-1$  vincoli sulle derivate devono essere imposti in maniera arbitraria. A seconda del problema può tornare utile poter fissare le derivate del primo polinomio, dell'ultimo e così via.

Per ricavare l'equazione della spline in questo modo è necessario pertanto risolvere un sistema lineare in  $n(k+1)$  incognite.

È da notare che ogni funzione *spline*  $S(t)$  di ordine  $n$  e formata da  $k$  intervalli può essere espressa sotto forma di somma di basi opportune come

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n+k+1} \beta_i B_i(t) \quad (3.17)$$

dove  $B_i(t) = (t - t_i)^n$  per  $i = 1, \dots, k$  e  $B_{i+k}(t) = t^{i-1}$  per  $i = 1, \dots, n-1$ . In altre parole lo spazio di tutte le funzioni spline è uno spazio lineare con  $B_i(t)$  basi della funzione *spline*. Il primo a usare basi per definire Spline è stato lo stesso Schoenberg nel 1946.

Nel caso di intervalli uniformi, esiste un modo molto compatto e numericamente stabile per rappresentare le spline sotto forma di opportune basi.

Tali funzioni, chiamate *B-Spline*, vengono generate da opportune funzioni basi, dette di *de Boor*, costruite in maniera ricorsiva.

Per definire una funzione *spline* sono necessari  $k+1$  punti di controllo  $P_0, \dots, P_k$  per i  $k$  intervalli. Le B-Spline permettono di definire, come per quelle di Bézier, l'equazione della curva attraverso opportuni punti di controllo

$$S(t) = \sum_{i=0}^k N_{i,n}(t) P_i \quad (3.18)$$

con  $N_{i,n}$  base di ordine  $n$  ovvero polinomio di grado  $n-1$  e  $P_i$  i punti di controllo (punti di *de Boor*). Eccetto per i gradi più bassi, anche in questo caso non c'è garanzia che la curva passi per i punti di controllo.

E sia

$$T = (\underbrace{a, \dots, a}_{n+1}, \underbrace{t_{n+1}, \dots, t_{l-n-1}}_{k-n}, \underbrace{b, \dots, b}_{n+1}) \quad (3.19)$$

il vettore nodale (*knot vector*) di  $l+1$  elementi, con  $l = n+k+1$ , in generale non periodico a nodi aggiuntivi coincidenti.

Dei  $n+k-1$  punti di controllo,  $k-1$  sono esterni a sinistra,  $n-k+1$  sono interni e i restanti  $k-1$  sono esterni a destra. Normalmente la curva è limitata, ovvero  $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$  e  $t_{l-n} = t_{l-n+1} = \dots = t_l = 1$ .

Un vettore di nodi  $T$  è chiamato uniforme se tutti i nodi interni sono equispaziati, altrimenti è chiamato non uniforme.

Le B-Spline uniformi su  $[0, 1]$  pertanto hanno i nodi in

$$\begin{aligned} t_i &= 0 & i &\in [0, n] \\ t_{j+n} &= \frac{j}{k-n-1} & j &\in [1, k-n] \\ t_i &= 1 & i &\in [l-n, l] \end{aligned} \quad (3.20)$$

La base di ordine  $n$  è costruita come convoluzione tra la base di ordine  $n-1$  e la base di primo ordine, ovvero

$$N_{i,n}(t) = (N_{i,n-1} * N_{i,1})(t) = \int_{t-1}^t N_{i,n-1}(x) dx \quad (3.21)$$

dove  $N_{i,1}(t)$  è la funzione *box*, funzione costate a tratti

Le basi  $N_{i,n}$  possono essere anche costruite in maniera ricorsiva:

$$\begin{aligned} N_{i,1}(t) &= \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ N_{i,n}(t) &= \frac{t-t_i}{t_{i+n-1}-t_i} N_{i,n-1}(t) + \frac{t_{i+n}-t}{t_{i+n}-t_{i+1}} N_{i+1,n-1}(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Questa è la versione dell'algoritmo di *de Casteljau* applicata alle B-Spline. In questo caso gli elementi  $\{t_i\}$  sono chiamati *knots*.

Dopo  $k-1$  stadi di ricorsione, si possono ottenere della basi  $B_{ik}$  nella forma

$$B_{ik} = \sum_{j=1}^{i+k-1} b_{jk} X_j \quad (3.23)$$

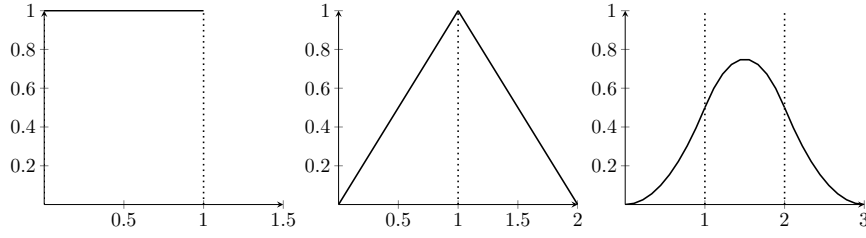


Figura 3.2: Alcune basi di De Boor, dal primo al terzo ordine.

Il vantaggio di queste basi è che possiedono un ‘supporto locale’: una modifica di una parte della curva coinvolge un intervallo limitato. Una B-Spline di grado  $n$  (ordine  $n + 1$ ) ha supporto pari a  $n + 1$  punti. Questo permette di costruire la spline usando una matrice diagonale dominante.

È importante notare che

Per ogni sottointervallo la somma di tutte le funzioni non nulle equivale all’unità. Partizionano l’unità

$$\sum_i B_{i,1}(t) = 1 \quad (3.24)$$

per ogni  $t \in [t_0, t_k]$ .

Positività  $B_{i,1}(t) \geq 0$ .

Proprietà supporto locale  $B_{i,k}(t) = 0 \ \forall t \notin [t_i, t_{i+k}]$ .

Derivata (Cox-de Boor)

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{i,n}(t) = \frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_{i,n-1}(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1,n-1}(t) \quad (3.25)$$

Nel caso delle B-Spline, i parametri addizionali sono forniti da *knots* aggiuntivi. Per definire completamente una B-Spline infatti, sono necessari  $n + k + 1$  punti di controllo.

L’algoritmo di *de Boor* viene usato perché è numericamente stabile.

Nel caso delle B-Spline il sistema lineare da risolvere è più semplice e la matrice da invertire è diagonale dominante, matrice che si presta a risolutori ad hoc molto efficienti.

### 3.5 Cubic Spiral

### 3.6 Linear Segment with Parabolic Blending

Traiettorie molto comuni in ambito instrustriale sono le LSPB dove l’attuatore è limitato in velocità.

## Capitolo 4

# Controllo laterale

Il controllo di un veicolo si può normalmente disaccoppiare in controllo laterale (sterzo) e longitudinale (acceleratore/freno). Buoni articoli da leggere su questo argomento sono [Sni09].

### 4.0.1 Controllo dello sterzo

Normalmente lo sterzo viene comandato con un set point di angolo il quale, attraverso un controllore PID adeguato e una PWM, viene trasformato in coppia da inviare a un motore DC accoppiato con lo sterzo.

### 4.0.2 Modello dello Sterzo

Un controllo basato su sterzo implica l'analisi di diversi trasduttori che collegano il controllo all'angolo che viene eseguito dalle ruote stesse. Normalmente il controllo automatico dello sterzo richiede l'utilizzo di un motore DC, controllato in voltaggio.

## 4.1 Controllo veicolo basato su sterzo

Esaminiamo il caso di un generico veicolo (FWS *Front Wheel Steering*) nello stato iniziale di moto curvilineo uniforme (il moto rettilineo è un caso particolare di moto curvilineo con raggio di curvatura infinito) con velocità  $v$  e direzione iniziale  $\theta_0$ :

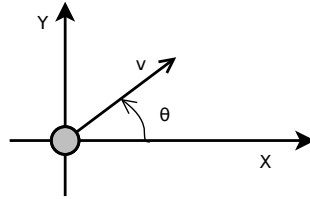


Figura 4.1: Centro di massa del veicolo in spostamento e rotazione

All'istante  $t_{-1}$  viene dato comando allo sterzo in modo da cambiare la direzione del veicolo da  $\theta_0$  a  $\theta_1$ , a fronte di una variazione dell'angolo del volante da  $\delta_{w_0}$  a  $\delta_{w_1}$ :

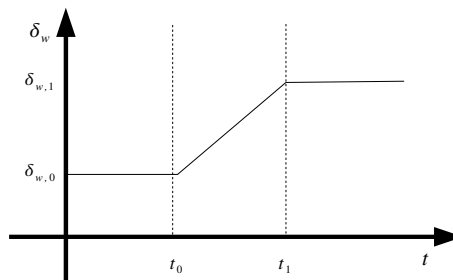


Figura 4.2: Transizione dell'angolo del volante

In questo caso, dopo un certo intervallo dovuto ai ritardi di controllo, viene eseguita una rotazione a velocità costante (in prima approssimazione, dipende molto dal tipo di controllo dello sterzo implementato) per variare la direzione del veicolo.

Nella dinamica del veicolo pertanto esistono due situazioni: una dove il volante è mantenuto a un angolo costante e una dove l'angolo dello sterzo varia (in prima approssimazione) linearmente.

Quando l'angolo di sterzo (e di conseguenza l'angolo tra il vettore velocità del veicolo con il sistema di riferimento) è costante, il veicolo si muove lungo una circonferenza di raggio  $R$ . Per questa ragione se il passaggio da  $\delta_{w_0}$  a  $\delta_{w_1}$  fosse istantaneo la traiettoria eseguita dal veicolo sarebbe composta esattamente da due archi di circonferenza. Quando però la transizione non è trascurabile il veicolo esegue archi di clotoide.

#### 4.1.1 Modello dello Sterzo

Motore Brushless

Inerzia dello sterzo

Junior's controller is adapted from Stanley, but has been enhanced significantly to directly control steering torque, instead of just steering angle (as was the case for Stanley). The controller has been tuned using reinforcement learning methods. <http://archive.darpa.mil/grandchallenge/TechPapers/Stanford.pdf>

#### 4.1.2 Clotoide

Per un veicolo in movimento la curvatura  $\kappa = 1/R$  è sempre definita e limitata (non esistono automobili capaci di ruotare su loro stesse) mentre il raggio di curvatura  $R$  tende a infinito nei tratti rettilinei: per questa ragione è preferibile esprimere le relazioni in funzione di  $\kappa$  piuttosto che  $R$ .

La clotoide è una linea curva la cui curvatura  $\kappa$  cambia linearmente a velocità  $\sigma$ :

$$\dot{\kappa} = \sigma \quad (4.1)$$

$\sigma$  è chiamata *sharpness* della clotoide.

In questo documento la notazione  $\dot{\kappa}$  indicherà una derivata di una funzione (in questo caso  $\kappa$ ) rispetto allo spazio  $s$  (normalmente in fisica tale notazione indica invece la derivata rispetto al tempo, ma si può passare sempre in derivate del tempo facendo la semplice sostituzione  $ds = vdt$ ).

Un veicolo è limitato meccanicamente sia nel raggio di curvatura  $|\kappa| < \kappa_{max}$  sia fisicamente nella sharpness  $|\sigma| < \sigma_{max}$ .

### 4.2 Pure Pursuit

Il metodo *Pure Pursuit* rappresenta uno dei metodi più semplici...

### 4.3 Metodo di DeLuca-Sampson

Funzione di errore di posizione ed errore di angolo.

#### 4.3.1 Metodo di Stanley

### 4.4 Controllo basato sull'inversione della cinematica

Una curva nel piano Cartesiano può essere descritta dalla funzione

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : [u_0, u_1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\rightarrow [x(u), y(u)]^\top \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove  $[u_0, u_1]$  è un intervallo chiuso.  $\mathbf{p}(u)$  è una curva regolare se  $\dot{\mathbf{p}}(u)$  è continua a tratti e  $\dot{\mathbf{p}} \neq 0 \forall u \in [u_0, u_1]$ .

La lunghezza dell'arco, ascissa curvilinea, definita  $s$  può essere calcolata come

$$\begin{aligned} f : [u_0, u_1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow s = \int_{u_0}^u \|\dot{\mathbf{p}}(\xi)\| d\xi \end{aligned} \quad (4.3)$$

### 4.5 Controllo Cinematico

[DLOS98]



## Capitolo 5

# Controllo longitudinale

DRAFT

# Capitolo 6

## Nomenclature

$L$	The distance between the front and rear axles in meters
$B$	The distance between wheels on the same axle in meters
$\delta$	Wheel angle (some authors use $\psi$ )
$\beta$	Slip Angle
$\kappa$	Curvature, $rad/m$
$\sigma$	Curve Sharpness, $rad/m^2$
$\delta_w$	Steering Wheel Angle
$R$	Curve Radius in meters ( $\rho$ could be also used)
$\theta$	Vehicle orientation in the reference frame, Absolute Yaw angle
$r$	Yaw-Rate, $rad/s$
$\dot{\theta}$	Yaw-Rate, $rad/m$
$v$	Speed, $m/s$
$a$	Acceleration, $m/s^2$
$K_V$	Understeer Gradient ( $K_{us}$ )

DRAFT

# Bibliografia

- [AB] J. Ackermann and P. Blue. *Robust Control: The Parameter Space Approach*. Springer Verlag.
- [DLOS98] A. De Luca, G. Oriolo, and C. Samson. Feedback control of a nonholonomic car-like robot. In J.-P. Laumond, editor, *Robot motion, planning and control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 229. Springer, 1998.
- [FS04] T. Fraichard and A. Scheuer. From reeds and shepp’s to continuous-curvature paths. *Robotics, IEEE Transactions on*, 20(6):1025–1035, Dec. 2004.
- [Gil92] T. D. Gillespie. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE, Warrendale, PA, USA, 1992.
- [Hea85] Mark A. Heald. Rational approximations for the Fresnel integrals. *Mathematics of Computation*, 44(170):459–461, April 1985.
- [Jaz09] Reza N Jazar. Mathematical Theory of Autodriver for Autonomous Vehicles . *Journal of Vibration and Control*, page 1077546309104467, 2009.
- [LaV06] S. M. LaValle. *Planning Algorithms*, chapter 13. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006. Chapter 13: Differential Models.
- [PoAE06] H.B. Pacejka and Society of Automotive Engineers. *Tire and vehicle dynamics*. SAE-R. SAE International, 2006.
- [Raj06] Rajesh Rajamani. *Vehicle Dynamics and Control*. Mechanical Engineering Series. Springer, 2006.
- [Sni09] Jarrod M Snider. Automatic steering methods for autonomous automobile path tracking. Technical Report CMU-RI-TR-09-08, Robotics Institute, Pittsburgh, PA, February 2009.
- [Wid02] J. P. Widerberg. Dynamic effect of the non-rigid modified bicycle model. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part D, Journal of automobile engineering*, volume 216 num.9, pages 717–722. Professional Engineering Publishing, September 2002.
- [Won01] J. Y. Wong. *Theory of Ground Vehicles*. Wiley-Interscience, 2001.
- [YRG03] P. Yih, J. Ryu, and J.C. Gerdes. Modification of vehicle handling characteristics via steer-by-wire. In *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 3, pages 2578–2583 vol.3, June 2003.