

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

---

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica

PIANIFICAZIONE E CONTROLLO  
DEL MOTO DI VEICOLI  
CON RIMORCHIO

MOTION PLANNING AND CONTROL  
OF VEHICLES WITH A TRAILER

Relatore:

Chiar.mo Prof. AURELIO PIAZZI

Correlatore:

Ing. GABRIELE LINI

Tesi di Laurea di:  
FABIO GHILARDELLI

---

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

Ai miei genitori,  
gli “sponsor”.

L'istruzione e la formazione  
sono le armi più potenti che si possono  
utilizzare per cambiare il mondo.

*-N. Mandela-*

# Ringraziamenti

Non sembra vero, ma finalmente posso dire di aver CONCLUSO la carriera di studente.

Per raggiungere questo difficile traguardo devo ovviamente ringraziare chi mi è stato vicino in questi anni di lavoro.

Innanzitutto devo ringraziare il Prof. Aurelio Piazzì per avermi dato la possibilità di scegliere questo argomento di tesi, per avermi indirizzato ed aiutato nella comprensione degli argomenti e nella stesura del testo. Non può mancare un ringraziamento infinito verso Gabriele che mi ha aiutato nel districare i concetti teorici per renderli “utilizzabili” nella simulazione realizzata. Un ringraziamento va anche alla pazienza che il Prof. Piazzì, il Prof. Consolini e Gabriele hanno sempre mostrato nel rispondere alle mie assillanti e-mail e alle mie richieste di chiarimento.

Ringrazio i miei genitori per avermi permesso di concludere gli studi senza (o quasi) mai obiettare sulle mie scelte e per essermi stati sempre vicini nei momenti belli ma anche in quelli difficili.

Ringrazio lo splendido gruppo di amici che si è formato in questi anni di vita universitaria (in ordine alfabetico): Ale, Andrea, Barbara, Chiara, Cri, Filo, Frà, Gionata, Golu, Macca, Mary, Massi, Michele, Nuccia, Razzo, Reddy, Sere. Tra lezioni, esami, mense, partite e serate ne abbiamo passate veramente tante insieme: mi sono sempre trovato benissimo con voi e spero che questo gruppo non finisca con la fine delle nostre carriere universitarie. Devo ringraziarvi per avermi aiutato e consigliato nelle peripezie tra un esame e l'altro. Una menzione speciale per Lorenzo e Mirco che mi hanno accompagnato nei

lunghe e tortuose (grazie Trenitalia) tragitti e per Chiara che mi ha dovuto sopportare anche nello svolgimento di troppi progetti!

Come non ringraziare gli amici del laboratorio: un grazie per Jacopo e Dario che mi hanno concesso una sedia e aperto la porta, ma soprattutto un grazie agli amici che hanno condiviso con me questi ultimi mesi di sofferenza pre-tesi. In particolare voglio ringraziare Alice per aver condiviso i problemi relativi lo svolgimento del progetto, Gianmichele, Michele e Andrea per aver allietato le giornate del laboratorio e aver abbassato il livello di tensione dovuto all'avvicinarsi delle scadenze.

Un grazie anche per gli amici di sempre, gli amici dello Staff, che sono sempre presenti e sempre pronti a far casino anche in giro per l'Europa. Momenti indimenticabili nelle afosissime estati di Piacenza per dimenticare le fatiche dell'anno precedente e per allontanare l'inizio del nuovo anno accademico, momenti inenarrabili nelle vacanze estere. Un gruppo veramente da Ù.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Pianificazione di traiettorie</b>	<b>3</b>
1.1 Robotica mobile . . . . .	3
1.2 Inversione dinamica di percorso . . . . .	5
1.3 Veicolo con rimorchio . . . . .	9
<b>2 Le <math>\eta^4</math>-spline</b>	<b>13</b>
2.1 Derivazione geometrica delle equazioni . . . . .	14
2.2 Calcolo dei coefficienti . . . . .	22
2.3 Generalizzazione sulle $\eta^k$ -spline . . . . .	25
2.4 Esempi di percorsi . . . . .	27
<b>3 Controllo <i>feedforward</i> su percorso assegnato</b>	<b>32</b>
3.1 Ambiente di lavoro . . . . .	32
3.2 Modello cinematico . . . . .	34
3.3 Stato esteso . . . . .	35
3.4 Determinazione dei parametri di interpolazione . . . . .	36
3.4.1 Marcia avanti . . . . .	37
3.4.2 Marcia indietro . . . . .	38
3.5 Vincoli . . . . .	38
3.6 Algoritmo di inversione dinamica di percorso . . . . .	40

---

<b>4</b>	<b>Ottimizzazione dei parametri</b>	<b>44</b>
4.1	Problema di minimizzazione . . . . .	45
4.1.1	Funzione di ottimizzazione . . . . .	48
4.2	Obstacle Avoidance . . . . .	48
4.2.1	Algoritmo . . . . .	51
4.3	Funzioni di penalità . . . . .	53
4.4	Parametri liberi . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Controllo del sistema</b>	<b>58</b>
5.1	I sistemi “flat” . . . . .	58
5.1.1	Trasformazione del modello cinematico . . . . .	60
5.2	Introduzione del rumore . . . . .	63
5.2.1	Modello cinematico con aggiunta del rumore . . . . .	64
5.3	Determinazione della legge di controllo . . . . .	64
5.3.1	Progettazione del controllore . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Simulazione</b>	<b>68</b>
6.1	Descrizione dell’ambiente . . . . .	68
6.1.1	Dimensioni veicolo con rimorchio . . . . .	69
6.1.2	Vincoli . . . . .	69
6.2	Scenario <i>Labirinto</i> . . . . .	71
6.3	Scenario <i>Parcheggio parallelo</i> . . . . .	74
6.3.1	Una manovra - indietro/avanti . . . . .	74
6.4	Scenario <i>Parcheggio Perpendicolare</i> . . . . .	77
6.4.1	Una manovra - avanti/indietro . . . . .	77
6.4.2	Due manovre - avanti/indietro/avanti . . . . .	80
6.5	Simulazione del controllo . . . . .	83
	<b>Conclusioni</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b><math>\eta^4</math>-spline caso generale</b>	<b>90</b>
A.1	Derivazione geometrica . . . . .	90
A.2	Calcolo dei coefficienti . . . . .	91

---

A.3	Proprietà delle $\eta^4$ - <i>spline</i> . . . . .	95
<b>B</b>	<b><math>\eta^5</math>-<i>spline</i> caso semplificato</b>	<b>97</b>
B.1	Derivazione geometrica . . . . .	97
B.2	Calcolo dei coefficienti . . . . .	100
	<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>

# Elenco delle figure

1.1	Modello del robot mobile su ruote . . . . .	5
1.2	Modello del veicolo con rimorchio . . . . .	10
2.1	Connessione di percorso di classe $G^4$ tra i punti $\mathbf{p}_A$ e $\mathbf{p}_B$ . . . . .	14
2.2	Esempio di $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline . . . . .	27
2.3	Fascio di $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline al variare di $\ddot{\kappa}_A$ e $\ddot{\kappa}_B$ . . . . .	28
2.4	Fascio di $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline al variare di $\dot{\kappa}_A$ e $\dot{\kappa}_B$ . . . . .	28
2.5	Fascio di $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline al variare di $\kappa_A$ e $\kappa_B$ . . . . .	29
2.6	Fascio di $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline al variare di $\theta_A$ e $\theta_B$ . . . . .	29
3.1	Ambiente con la rappresentazione matematica degli ostacoli . . . . .	33
3.2	Ambiente di lavoro per la simulazione . . . . .	34
3.3	Costruzione geometrica del percorso $\Gamma_0$ . . . . .	41
3.4	Cambio di corsia del veicolo con rimorchio . . . . .	43
3.5	Controllo $\delta(s)$ in funzione dell'ascissa curvilinea . . . . .	43
4.1	Collisione con un ostacolo . . . . .	50
4.2	Risultato della pianificazione integrando l'obstacle avoidance . . . . .	51
4.3	Funzione di penalità per la curvatura del percorso del rimorchio . . . . .	54
6.1	<i>Labirinto</i> - Percorso del veicolo con rimorchio . . . . .	72
6.2	<i>Labirinto</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del rimorchio . . . . .	72
6.3	<i>Labirinto</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del veicolo trainante . . . . .	73
6.4	<i>Labirinto</i> - Controllo $\delta(s)$ . . . . .	73
6.5	<i>Parcheggio parallelo BF</i> - Percorso del veicolo con rimorchio . . . . .	74

---

6.6	<i>Parcheggio parallelo BF</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del rimorchio . . . . .	75
6.7	<i>Parcheggio parallelo BF</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del veicolo trainante . . . . .	75
6.8	<i>Parcheggio parallelo BF</i> - Controllo $\delta(s)$ . . . . .	76
6.9	<i>Parcheggio perp. FB</i> - Percorso del veicolo con rimorchio . . . . .	78
6.10	<i>Parcheggio perp. FB</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del rimorchio . . . . .	78
6.11	<i>Parcheggio perp. FB</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del veicolo trainante . . . . .	79
6.12	<i>Parcheggio perp. FB</i> - Controllo $\delta(s)$ . . . . .	79
6.13	<i>Parcheggio perp. FBF</i> - Percorso del veicolo con rimorchio . . . . .	81
6.14	<i>Parcheggio perp. FBF</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del rimorchio . . . . .	81
6.15	<i>Parcheggio perp. FBF</i> - $\kappa$ e $\dot{\kappa}$ del veicolo trainante . . . . .	82
6.16	<i>Parcheggio perp. FBF</i> - Controllo $\delta(s)$ . . . . .	82
6.17	<i>Inversione</i> - Percorso del veicolo con rimorchio . . . . .	83
6.18	<i>Inversione</i> - Percorso nominale e perturbato . . . . .	84
6.19	<i>Inversione</i> - Ingrandimento di una parte del percorso . . . . .	84
6.20	<i>Inversione</i> - $\delta(t)$ nominale e perturbato . . . . .	86
6.21	<i>Inversione</i> - $v(t)$ nominale e perturbato . . . . .	87

# Introduzione

Negli ultimi anni, la robotica mobile ha rivestito un interesse sempre maggiore nell'ambito dell'automazione. I motivi principali risiedono nell'enorme potenzialità che possiedono queste macchine a portare a termine processi che sono considerati difficili per l'uomo o che vengono svolti in ambienti ostili, come per esempio nelle industrie nucleari. Un ulteriore campo di applicazione della robotica mobile è rappresentato da tutti quei compiti che prevedono una sorta di ripetitività e dipendenza da parte dell'uomo.

Una competenza necessaria che un robot mobile deve avere è la capacità di muoversi evitando collisioni con eventuali ostacoli presenti nell'ambiente. Ciò implica che il robot deve avere una conoscenza sufficientemente dettagliata dell'ambiente circostante. La pianificazione del moto risulta essere quindi un nodo cruciale nello sviluppo di questa tipologia di sistemi autonomi.

In un primo tempo, gli sforzi erano concentrati nella risoluzione di problematiche insite nell'automazione industriale come per esempio l'automazione della catena di produzione oppure la movimentazione e il trasporto merci in magazzini. Ora si cerca di risolvere anche le problematiche presenti nella vita quotidiana dell'uomo. Uno dei temi più studiati a tale scopo riguarda l'ambito della guida automatica.

In tale scenario, la tesi propone una soluzione al problema di pianificazione e controllo di veicoli con rimorchio al fine di ottenere la guida automatica del veicolo stesso. Questo problema è inserito nella metodologia di navigazione con *sterzata iterativa* ed *inversione dinamica di percorso*. Una specifica particolare del problema affrontato è la richiesta di avere dei segnali di con-

trollo con derivate continue, al fine di ottenere una pianificazione facilmente realizzabile dagli azionamenti presenti sul veicolo ed avere anche una risposta piacevole dal punto di vista del *comfort di guida*.

Un risultato esposto nella tesi impone la necessità di utilizzare, per pianificare il percorso del punto medio dell'asse ruote del rimorchio, un percorso con continuità geometrica del quarto ordine. Nell'ottica di generare dei controlli per il veicolo con rimorchio di classe  $C^1$ , la procedura di inversione dinamica di percorso risulta un problema ben posto soltanto mediante l'utilizzo di percorsi di classe  $G^4$ . Un percorso con continuità geometrica del quarto ordine è un percorso regolare che possiede la continuità del vettore tangente alla curva, della curvatura, derivata di curvatura e derivata seconda di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco.

Per maneggiare curve con questo grado di continuità sono state sviluppate le  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline*. Queste curve sono polinomi di nono grado che dipendono dalle condizioni di interpolazione geometrica imposte agli estremi delle curve e da un vettore  $\boldsymbol{\eta}$  di parametri liberi.

Le  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline* risolvono il problema di interpolazione geometrica di classe  $G^4$  tra due punti arbitrari considerando, come condizioni di interpolazione, i punti del piano cartesiano iniziale e finale, i versori tangenti alla curva nel punto iniziale e finale, la curvatura, la derivata prima di curvatura e la derivata seconda di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco nei punti iniziale e finale.

È necessario inserire un ottimizzatore dei parametri del percorso per permettere al veicolo con rimorchio una movimentazione fluida e senza discontinuità nei punti di giunzione tra i vari tratti.

Successivamente è stato riconsiderato il modello cinematico del veicolo con rimorchio per permettere di generare, mediante la teoria dei sistemi “*flat*”, i segnali di controllo cercati.

# Capitolo 1

## Pianificazione di traiettorie

*In questo capitolo si tratta del problema della pianificazione delle traiettorie con un approccio generico. Si espone anche una breve introduzione alla robotica mobile e all'inversione dinamica di percorso.*

### 1.1 Robotica mobile

La robotica cerca di utilizzare la potenza di calcolo degli elaboratori elettronici applicata a dispositivi elettromeccanici per svolgere dei compiti ritenuti pericolosi oppure molto complessi per l'uomo. Esistono infatti numerosi compiti che l'uomo delega alla macchina avendo meno rischio personale e, allo stesso tempo, perseguendo risultati migliori: si pensi alla robotica industriale dove la gran parte dei compiti ripetitivi e rischiosi per la salute dell'uomo sono svolti da macchine robotiche in maniera più veloce e precisa di quanto l'uomo possa riuscire.

Lo sviluppo della robotica mobile ha permesso di automatizzare molti processi di trasporto in svariati campi. L'ambito che, fino ad ora, ha suscitato maggiore interesse è il trasporto di merci e semilavorati in magazzini strutturati: l'implementazione di comportamenti robotici in navette per la movimenta-

zione automatica di merci ha risolto innumerevoli problemi di congestione del traffico ad esempio. Oltre all'ambito prettamente industriale, gli studi della robotica mobile si stanno concentrando anche nella direzione dell'aiuto e della sicurezza alla guida. Dal punto di vista della sicurezza sono presenti sul mercato soluzioni che assistono il conducente nell'affrontare situazioni problematiche come per esempio fondi stradali accidentati. Anche per quanto riguarda l'aiuto alla guida sono presenti in letteratura applicazioni per il sostegno alla guida in situazioni critiche quali parcheggio e la rilevazione di ostacoli improvvisi. Il problema è molto sentito anche per veicoli di grandi dimensioni come possono essere i veicoli con rimorchio. L'ingombro che producono nella loro movimentazione implica un impegno costante da parte del guidatore per effettuare manovre anche complesse. In questo scenario la tesi si propone di risolvere il problema della pianificazione e il controllo del moto di veicoli con rimorchio per riuscire ad eseguire manovre arbitrarie in scenari non strutturati.

La pianificazione di traiettorie efficaci per robot mobili su ruote è una delle sfide ancora aperte nel mondo scientifico. Inizialmente, la ricerca, si è orientata sulla generazione di percorsi ottimi tra punti assegnati in uno spazio planare. I percorsi generati erano formati dalla congiunzione di segmenti ed archi circolari per garantire vincoli sulla massima curvatura dove si cercava di minimizzare la lunghezza della curva che rappresentava il criterio ottimo da essere perseguito. Il problema principale di questo approccio risiede nel comportamento del robot mobile nei punti di contatto tra i percorsi: la curvatura risulta essere discontinua. Questo, come si vedrà nel seguito della tesi, produce una discontinuità nel segnale di controllo che provoca, nel robot che deve seguire il percorso, una sosta forzata nel punto di contatto per orientare le ruote nella direzione iniziale del nuovo tratto. Il risultato più evidente è un rallentamento nello moto generale del robot. Per ovviare al problema è necessario pianificare le condizioni di interpolazione tra i percorsi consecutivi garantendo un elevato grado di continuità geometrica. Il problema da risolvere è quindi un problema di interpolazione tra punti al fine di garantire la

continuità dei controlli.

## 1.2 Inversione dinamica di percorso

Il problema di controllo del moto di un veicolo con rimorchio può essere visto come problema di *inversione dinamica di percorso* ossia il veicolo deve inseguire la curva  $\Gamma$  pianificata in precedenza in modo da minimizzare l'errore di posizione sul percorso pianificato.

La teoria dell'*inversione dinamica di percorso* è una teoria che si applica a tutte le tipologie di veicoli su ruote non-onolomi. Per semplicità di trattazione la risoluzione del problema sarà affrontata facendo riferimento ad un particolare robot mobile su ruote il cui modello cinematico è evidenziato in Figura 1.1. La trattazione segue quella presente nell'articolo [2] in Bibliografia. L'idea di base è quella di considerare il segnale di uscita  $y(t)$ ,

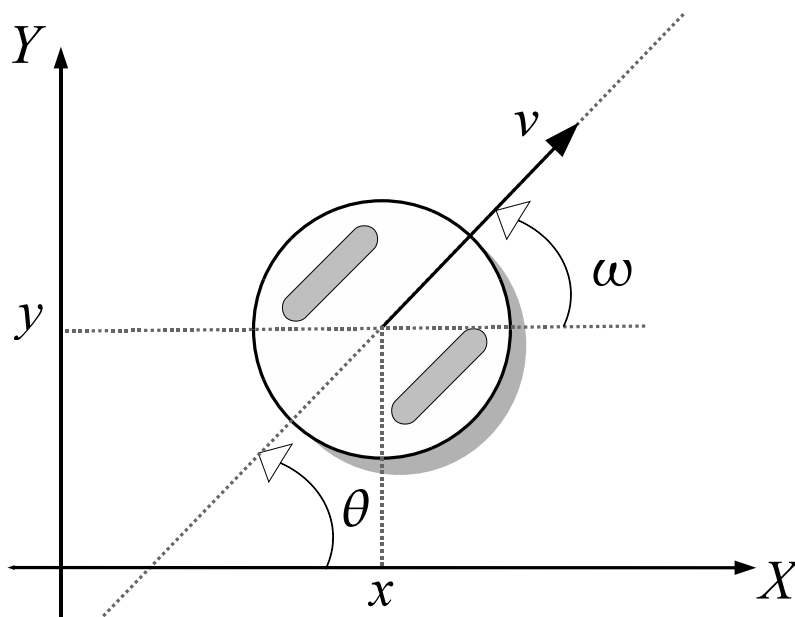


Figura 1.1: Modello del robot mobile su ruote

di un generico sistema multivariabile, come una funzione (curva) di para-

metrizzazione di un percorso  $\Gamma$ , nello spazio delle uscite  $\mathbb{R}^p$ . Quindi, in un certo intervallo  $[0, t_1]$ , dovrà essere  $\Gamma = y([0, t_1])$ . Il problema di inversione dinamica di percorso è, perciò, il seguente:

**Problema 1.1.** *Dato un percorso  $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$  ed un tempo di spostamento  $t_1 > 0$ , si devono determinare le condizioni iniziali e la funzione di ingresso  $u(t)$ , tali che l'uscita di sistema  $y(t)$  soddisfi la condizione*

$$y([0, t_1]) = \Gamma \quad (1.1)$$

A partire dai parametri messi in evidenza nella Figura 1.1, si ottiene facilmente il seguente modello

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) = v(t) \sin \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

dove  $x$  e  $y$  indicano la posizione del robot nel piano,  $\theta$  è l'angolo di orientazione, mentre  $v$  e  $\omega$  rappresentano rispettivamente la velocità lineare ed angolare e, in questo contesto, saranno utilizzate come funzioni di controllo del robot. Per ottenere buone performance di movimento, le funzioni  $v(t)$  e  $\omega(t)$  saranno considerate di classe  $C^1$ , cioè le accelerazioni lineare ed angolare saranno segnali continui.

Da un punto di vista matematico, lo stato del modello (1.2) al tempo  $t$  sarà dato da  $\{x(t), y(t), \theta(t)\}$ ; nel seguito, per convenienza, si utilizzerà lo *stato esteso*, comprendente gli ingressi e le loro derivate, definito come

$$\{x(t), y(t), \theta(t), v(t), \dot{v}(t), \omega(t), \dot{\omega}(t)\} \quad (1.3)$$

Ora, il problema di pianificazione del moto che si sta affrontando, può essere visto come un problema di *raggiungibilità* nello spazio degli *stati estesi*. Quindi, il Problema 1.1 si trasforma nel seguente modo:

**Problema 1.2.** *Dato un qualsiasi tempo finale  $t_f > 0$  trovare degli ingressi di controllo  $v(\cdot), \omega(\cdot) \in C^1([0, t_f])$  tali che il robot mobile, partendo da un arbitrario stato esteso iniziale*

$$\mathbf{p}_A = [x_A, y_A]^T = [x(0), y(0)]^T$$

$$\theta_A = \theta(0)$$

$$v_A = v(0)$$

$$\dot{v}_A = \dot{v}(0)$$

$$\omega_A = \omega(0)$$

$$\dot{\omega}_A = \dot{\omega}(0)$$

*raggiunga lo stato esteso finale*

$$\mathbf{p}_B = [x_B, y_B]^T = [x(t_f), y(t_f)]^T$$

$$\theta_B = \theta(t_f)$$

$$v_B = v(t_f)$$

$$\dot{v}_B = \dot{v}(t_f)$$

$$\omega_B = \omega(t_f)$$

$$\dot{\omega}_B = \dot{\omega}(t_f)$$

Il problema appena introdotto può essere risolto attraverso una procedura di inversione dinamica di percorso, mentre la strategia generale per il controllo del moto può essere di natura iterativa, e verrà applicata da un sistema supervisore. La conoscenza *real-time* della posizione del robot, può essere utilizzata dal sistema supervisore per controllare la transizione dallo stato esteso  $\mathcal{A}$  allo stato esteso  $\mathcal{B}$ .

La Proposizione 1.1, è essenziale per capire come pianificare il percorso desiderato che unisca gli stati iniziale e finale; prima di enunciarla si introducono le seguenti definizioni.

**Definizione 1.1** (curva). *Una curva sul piano  $\{x, y\}$  può essere descritta dalla mappa*

$$\mathbf{p} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{p}(u) = [\alpha(u) \ \beta(u)]^T \quad (1.4)$$

dove  $[u_0, u_1]$  è un intervallo chiuso reale. Il “percorso” associato è l’immagine di  $[u_0, u_1]$  in  $\mathbf{p}(u)$  ossia  $\mathbf{p}([u_0, u_1])$ .

**Definizione 1.2.** Una curva  $\mathbf{p}(u)$  è regolare nell'intervallo  $[u_0, u_1]$  se  $\dot{\mathbf{p}}(u) \in C_p([u_0, u_1])$  e  $\dot{\mathbf{p}}(u) \neq 0 \forall u \in [u_0, u_1]$  ( $C_p$  denota la classe delle funzioni continue a tratti).

**Definizione 1.3** (curve  $G^1$ ). Una curva parametrica  $\mathbf{p}(u)$  ha una continuità geometrica del primo ordine, e diremo che  $\mathbf{p}(u)$  è una curva  $G^1$  se  $\mathbf{p}(u)$  è regolare ed il suo vettore tangente è una funzione continua lungo la curva.

**Definizione 1.4** (curve  $G^2$ ). Una curva parametrica  $\mathbf{p}(u)$  ha una continuità geometrica del secondo ordine, e diremo che  $\mathbf{p}(u)$  è una curva  $G^2$  se  $\mathbf{p}(u)$  è una curva  $G^1$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}(u)$  è continua a tratti e la sua curvatura scalare è continua lungo la curva.

**Definizione 1.5** (curve  $G^3$ ). Una curva parametrica  $\mathbf{p}(u)$  ha una continuità geometrica del terzo ordine, e diremo che  $\mathbf{p}(u)$  è una curva  $G^3$  se  $\mathbf{p}(u)$  è una curva  $G^2$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}(u)$  è continua a tratti e la derivata della curvatura scalare rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$  è continua lungo la curva.

**Proposizione 1.1.**  $\forall t_f > 0$ , se un percorso cartesiano  $\Gamma$  è generato da un modello come quello in (1.2) con  $v(t), \omega(t) \in C^1([0, t_f])$  e  $v(t) \neq 0 \forall t \in [0, t_f]$  allora tale percorso è di classe  $G^3$ . Viceversa, dato ogni cammino  $\Gamma$  di classe  $G^3$ , esistono funzioni  $v(t), \omega(t) \in C^1([0, t_f])$  con  $v(t) \neq 0 \forall t \in [0, t_f]$  e condizioni iniziali tali che il cammino generato dal modello (1.2) coincide con il cammino  $\Gamma$  dato, di classe  $G^3$ .

Dalla Proposizione 1.1 risulta evidente che per risolvere il problema di inversione dinamica di percorso con  $v(t) \neq 0$ , il percorso dato  $\Gamma$  deve essere una curva  $G^3$ ; per la dimostrazione di tale proposizione si rimanda all'articolo [2]. Dal punto di vista matematico la Proposizione 1.1 non è sufficiente per risolvere il problema di pianificazione di traiettorie per il veicolo con rimorchio. Per risolvere questo problema è necessario introdurre la continuità geometrica del quarto ordine ( $G^4$ ) e la successiva definizione di percorso.

**Definizione 1.6** (curve  $G^4$ ). Una curva parametrica  $\mathbf{p}(u)$  ha una continuità geometrica del quarto ordine, e diremo che  $\mathbf{p}(u)$  è una curva  $G^4$  se  $\mathbf{p}(u)$  è

una curva  $G^3$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}(u)$  è continua a tratti e la derivata seconda della curvatura scalare rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$  è continua lungo la curva.

**Definizione 1.7** (Percorso  $G^1, G^2, G^3, G^4$ ). *Un percorso in uno spazio cartesiano, cioè un insieme di punti in questo spazio è un percorso  $G^i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) se esiste una curva parametrica con continuità geometrica di ordine  $i$ -esimo la cui immagine è proprio il percorso dato.*

Per impostare il problema di pianificazione di traiettorie per il veicolo con rimorchio è necessario introdurre il modello cinematico del veicolo con rimorchio. La sezione successiva permette di comprendere il modello ed esporre il problema della pianificazione di traiettorie.

### 1.3 Veicolo con rimorchio

Per prima cosa si riporta il modello cinematico del veicolo con rimorchio ricordando le sue caratteristiche principali (vedi Figura 1.2). Il modello corrisponde ad un veicolo a trazione posteriore agganciato al quale è presente un rimorchio passivo. Il punto di fissaggio è posto nel punto medio dell'asse ruota posteriore del veicolo dove è anche presente il riferimento cartesiano per la posizione del veicolo. Inoltre sono indispensabili per la comprensione del modello cinematico i seguenti parametri:

- $d_0$  distanza fra gli assi del veicolo motrice;
- $d_1$  distanza fra l'asse del rimorchio ed il gancio di traino;
- $v$  velocità del punto medio dell'asse delle ruote posteriori del veicolo trainante;
- $v_1$  velocità del punto medio dell'asse delle ruote del rimorchio;
- $\omega_1$  velocità angolare del rimorchio;

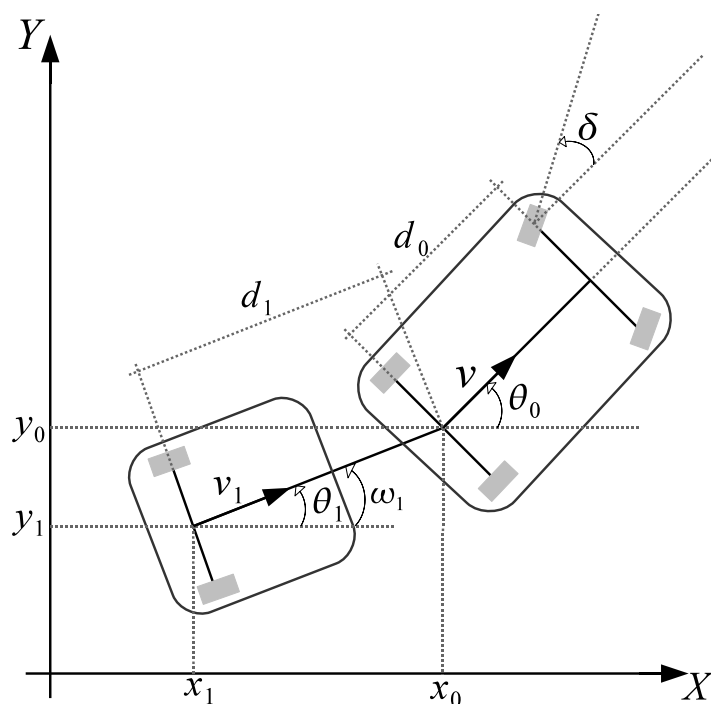


Figura 1.2: Modello del veicolo con rimorchio

- $(x_0, y_0)$  coordinate cartesiane del punto che indica la posizione del veicolo, posto esattamente nel punto medio dell'asse delle sue ruote posteriori;
- $(x_1, y_1)$  coordinate cartesiane del punto che indica la posizione del rimorchio, posto esattamente nel punto medio dell'asse delle sue ruote;
- $\delta$  angolo che misura la sterzata del veicolo trainante;
- $\theta_0$  angolo che misura l'orientamento del veicolo trainante rispetto al sistema cartesiano con riferimento all'asse di simmetria del veicolo stesso;
- $\theta_1$  angolo che misura l'orientamento del rimorchio rispetto al sistema cartesiano con riferimento all'asse di simmetria del rimorchio stesso.

Da semplici relazioni geometriche si ricava:

$$\begin{aligned}v_1 &= v \cos(\theta_0 - \theta_1) \\ \omega_1 &= \frac{v}{d_1} \sin(\theta_0 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1\end{aligned}$$

Il modello cinematico del veicolo con rimorchio risultante è mostrato in equazione (1.5).

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v \cos \theta_0 \\ \dot{y}_0 = v \sin \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = \frac{v}{d_0} \tan \delta \\ \dot{\theta}_1 = \frac{v}{d_1} \sin(\theta_0 - \theta_1) \end{cases} \quad (1.5)$$

I controlli di questo sistema sono rappresentati da  $v(t)$  e  $\delta(t)$  rispettivamente la velocità lineare del veicolo trainante ed il valore di sterzata delle ruote anteriori dello stesso. Per garantire dei controlli di classe  $C^1$  è necessaria una elevata continuità geometrica del percorso che interpola i punti. Questo risultato segue dalla Proposizione 1.2.

**Proposizione 1.2.** *Sia assegnato un tempo  $t_1 > 0$ .*

*Per il modello cinematico di veicolo con rimorchio (1.5) si considerino uno stato iniziale e controlli  $v(t), \delta(t) \in C^1([0, t_1])$  con  $v(t) \neq 0$  e  $|\delta(t)| < \frac{\pi}{2}, \forall t \in [0, t_1]$  per i quali  $|\theta_0(t) - \theta_1(t)| < \frac{\pi}{2} \forall t \in [0, t_1]$ . Allora il percorso generato dal punto medio dell'asse ruota del rimorchio è un percorso di classe  $G^4$ .*

*Viceversa, dato un percorso  $\Gamma$  di classe  $G^4$  per il modello (1.5) esistono uno stato iniziale e controlli  $v(t), \delta(t) \in C^1([0, t_1])$  con  $v(t) \neq 0$  e  $|\delta(t)| < \frac{\pi}{2}, \forall t \in [0, t_1]$  per i quali  $|\theta_0(t) - \theta_1(t)| < \frac{\pi}{2} \forall t \in [0, t_1]$  ed il percorso generato dal punto medio dell'asse ruota del rimorchio coincide con  $\Gamma$ .*

Dal punto di vista matematico la Proposizione 1.2 mette in evidenza la necessità di ricavare dal modello cinematico del veicolo con rimorchio (1.5) le informazioni relative alla posizione del punto medio dell'asse ruota del

rimorchio. Da semplici calcoli geometrici si può ricavare che la posizione desiderata, espressa dal punto  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$  si ottiene mediante:

$$x_1 + j y_1 = x_0 + j y_0 + d_1 e^{j(\pi+\theta_1)}. \quad (1.6)$$

In termini matematici formali la coincidenza del percorso di generato dal punto  $\mathbf{p}_1$  con il percorso  $\Gamma$  può essere espresso mediante

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} ([0, t_1]) = \Gamma. \quad (1.7)$$

Si è scelto di pianificare la traiettoria del veicolo con rimorchio partendo dal punto posteriore del rimorchio. Questa condizione implica la necessità di avere un polinomio interpolatore di grado sufficientemente elevato per garantire la continuità dei controlli (che sono riferiti al punto medio dell'asse ruota posteriore del veicolo trainante). È quindi necessario avere a disposizione uno strumento matematico che permetta di interpolare punti qualsiasi dello spazio cartesiano. Lo strumento sviluppato sono le cosiddette  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline*, polinomi di nono grado che consentono di ottenere i controlli  $\delta(t), v(t) \in C^1$ .

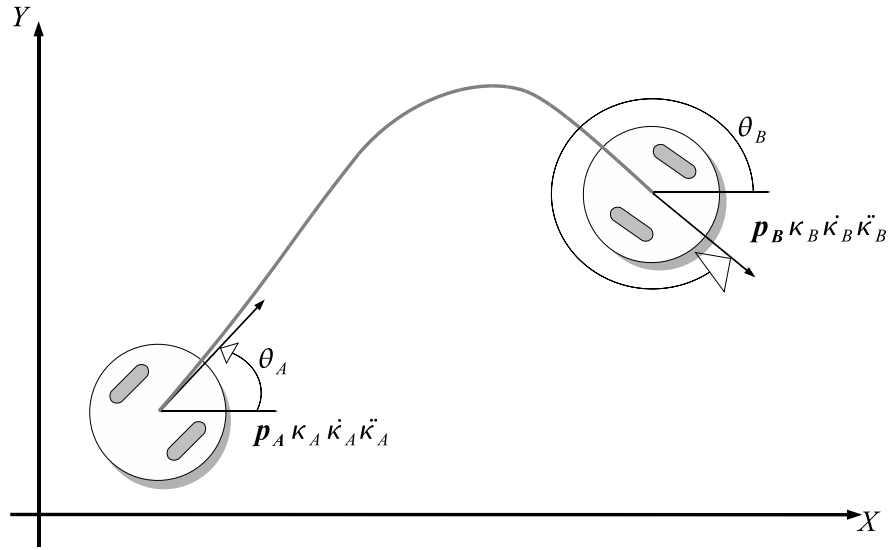
# Capitolo 2

## Le $\eta^4$ -spline

*In questo capitolo si espone la generazione di percorsi che interpolano punti arbitrari del piano mediante lo strumento delle  $\eta^4$ -spline*

Nel contesto del controllo *feedforward* di un veicolo con rimorchio, il capitolo precedente ha evidenziato la necessità di pianificare percorsi di classe  $G^4$  avendo condizioni di interpolazione iniziali e finali arbitrarie. L'approccio più naturale è la ricerca di curve polinomiali che risolvano il problema di interpolazione. Questo giustifica l'introduzione del seguente problema formale.

**Problema 2.1** (Interpolazione polinomiale di classe  $G^4$ ). *Determinare la curva polinomiale di ordine minimo che interpola due punti terminali  $\mathbf{p}_A = [x_A \ y_A]^T$  e  $\mathbf{p}_B = [x_B \ y_B]^T$  con associati i versori tangenti definiti dagli angoli  $\theta_A$  e  $\theta_B$ , curvatures scalari  $\kappa_A$  e  $\kappa_B$ , le derivate di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $\dot{\kappa}_A$  e  $\dot{\kappa}_B$  e le derivate seconde di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $\ddot{\kappa}_A$  e  $\ddot{\kappa}_B$  (si veda Figura 2.1). Si consideri che i dati di interpolazione,  $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta_A, \theta_B \in [0, 2\pi)$ ,  $\kappa_A, \kappa_B \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{\kappa}_A, \dot{\kappa}_B \in \mathbb{R}$  e  $\ddot{\kappa}_A, \ddot{\kappa}_B \in \mathbb{R}$ , possono essere assegnati arbitrariamente.*


 Figura 2.1: Connessione di percorso di classe  $G^4$  tra i punti  $\mathbf{p}_A$  e  $\mathbf{p}_B$ 

## 2.1 Derivazione geometrica delle equazioni

La soluzione al problema di interpolazione polinomiale di classe  $G^4$  (si veda Problema 2.1) è data dalla curva polinomiale del nono ordine  $\mathbf{p}(u) = [\alpha(u) \beta(u)]^T$ , con  $u \in [0, 1]$ , definita come segue:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &\doteq \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \alpha_5 u^5 + \\ &\quad + \alpha_6 u^6 + \alpha_7 u^7 + \alpha_8 u^8 + \alpha_9 u^9 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \beta(u) &\doteq \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + \beta_5 u^5 + \\ &\quad + \beta_6 u^6 + \beta_7 u^7 + \beta_8 u^8 + \beta_9 u^9 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si devono ora introdurre alcune definizioni di geometria planare per riuscire a risolvere il Problema 2.1.

La lunghezza dell'arco misurata lungo  $\mathbf{p}(u)$ , denotata dalla lettera  $s$ , può essere valutata dalla seguente funzione

$$f : [u_0, u_1] \rightarrow [0, s_f], \quad u \rightarrow s = \int_{u_0}^u \|\dot{\mathbf{p}}(\xi)\| d\xi \quad (2.3)$$

dove  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidea ed  $s_f$  è la lunghezza totale della curva cioè  $s_f = f(u_1)$ . Assegnata una curva regolare  $\mathbf{p}(u)$ , la funzione lunghezza

dell'arco lungo la curva  $f(\cdot)$  è continua in  $[u_0, u_1]$  e biettiva.

Dalla definizione di curvatura in geometria planare è possibile scrivere

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\kappa}{du} \frac{du}{ds} = \frac{d\kappa}{du} \frac{1}{\frac{ds}{du}} = \frac{d\kappa}{du} \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(u)\|}$$

ovvero

$$\frac{d\kappa}{ds}(u) = \frac{d\kappa}{du} \|\dot{\mathbf{p}}(u)\| \quad (2.4)$$

che rappresenta la derivata di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$ .

Analogamente si introduce la definizione di derivata seconda di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$  nel seguente modo

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{d\kappa}{ds} \right) = \frac{d}{du} \left( \frac{d\kappa}{ds} \right) \frac{du}{ds} = \frac{d}{du} \left( \frac{d\kappa}{ds} \right) \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(u)\|}$$

ovvero

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2}(u) = \frac{d}{du} \left( \frac{d\kappa}{ds}(u) \right) \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(u)\|}. \quad (2.5)$$

Ora si è in grado di impostare il sistema di equazioni per risolvere il Problema 2.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_A \quad (2.6a) \\ \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_B \quad (2.6b) \\ \dot{\mathbf{p}}(0) = \eta_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \quad (2.6c) \\ \dot{\mathbf{p}}(1) = \eta_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \quad (2.6d) \\ \kappa(0) = \kappa_A \quad (2.6e) \\ \kappa(1) = \kappa_B \quad (2.6f) \\ \frac{d\kappa}{ds}(0) = \dot{\kappa}_A \quad (2.6g) \\ \frac{d\kappa}{ds}(1) = \dot{\kappa}_B \quad (2.6h) \\ \frac{d^2\kappa}{ds^2}(0) = \ddot{\kappa}_A \quad (2.6i) \\ \frac{d^2\kappa}{ds^2}(1) = \ddot{\kappa}_B \quad (2.6j) \\ \langle \ddot{\mathbf{p}}(0), \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \rangle = \eta_3 \quad (2.6k) \\ \langle \ddot{\mathbf{p}}(1), \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \rangle = \eta_4 \quad (2.6l) \\ \langle \ddot{\mathbf{p}}(0), \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \rangle = \eta_5 \quad (2.6m) \\ \langle \ddot{\mathbf{p}}(1), \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \rangle = \eta_6 \quad (2.6n) \\ \langle \dddot{\mathbf{p}}(0), \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \rangle = \eta_7 \quad (2.6o) \\ \langle \dddot{\mathbf{p}}(1), \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \rangle = \eta_8 \quad (2.6p) \end{array} \right.$$

con

$$\eta_1, \eta_2 > 0, \quad \eta_i \in \mathbb{R} \text{ con } i = 3, \dots, 8.$$

Il sistema (2.6) è composto da venti equazioni in venti incognite ( $\alpha_i, \beta_i$  con  $i = 0, \dots, 9$ ). La soluzione di questo sistema è unica e indipendente dai parametri

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5 \ \eta_6 \ \eta_7 \ \eta_8]^T$$

perchè la matrice dei coefficienti associata al sistema risulta non singolare. Per il calcolo esplicito dell'unica soluzione di questo sistema è indispensabile l'utilizzo di software di calcolo simbolico (in questo lavoro di tesi si è utilizzato **MAPLE**<sup>TM</sup> versione 11<sup>1</sup>).

Ora si passa all'analisi del sistema espresso in (2.6).

Le equazioni (2.6a) - (2.6j) impongono le condizioni di interpolazione geometrica mentre le successive equazioni (2.6k) - (2.6p) impongono le condizioni di interpolazione matematica. Le condizioni di interpolazione matematica sono necessarie per annullare i gradi di libertà intrinseci del Problema 2.1 avendo come condizioni di interpolazione le quantità espresse dalla Proposizione 2.1.

Le equazioni (2.6a) e (2.6b) impongono le condizioni di interpolazione del punto iniziale e finale desiderati. Esplicitamente l'equazione (2.6a) permette in modo immediato di determinare le prime due incognite del problema  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  in quanto l'equazione (2.6a) diventa

$$\alpha_0 = x_A \quad (2.7)$$

$$\beta_0 = y_A. \quad (2.8)$$

Mentre l'equazione (2.6b) determina la condizione di interpolazione del punto finale

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = x_A \quad (2.9)$$

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 + \beta_9 = y_A. \quad (2.10)$$

Le equazioni (2.6c) e (2.6d) impongono le condizioni di orientazione iniziale e finale ed introducono i parametri  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . La definizione di questi parametri risiede nella velocità matematica della curva. Sono introdotti per diminuire

<sup>1</sup>Maggiori informazioni sul prodotto: <http://www.maplesoft.com/products/maple/>

il numero di parametri liberi del sistema.

Si introduce  $\dot{\mathbf{p}}(u)$  come differenziazione esplicita rispetto ad  $u$  di  $\mathbf{p}(u)$ .

$$\dot{\mathbf{p}}(u) = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(u) \\ \dot{\beta}(u) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

con

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(u) = & \alpha_1 + 2\alpha_2 u + 3\alpha_3 u^2 + 4\alpha_4 u^3 + 5\alpha_5 u^4 + \\ & + 6\alpha_6 u^5 + 7\alpha_7 u^6 + 8\alpha_8 u^7 + 9\alpha_9 u^8 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(u) = & \beta_1 + 2\beta_2 u + 3\beta_3 u^2 + 4\beta_4 u^3 + 5\beta_5 u^4 + \\ & + 6\beta_6 u^5 + 7\beta_7 u^6 + 8\beta_8 u^7 + 9\beta_9 u^8 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Formalmente i parametri  $\eta_1$  e  $\eta_2$  sono definiti come segue:

$$\eta_1 \doteq \|\dot{\mathbf{p}}(0)\| = (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

$$\eta_2 \doteq \|\dot{\mathbf{p}}(1)\| \quad (2.15)$$

Da questa definizione si devono imporre le condizioni sui parametri  $\boldsymbol{\eta}$ . Dato che sono definiti come norma di  $\dot{\mathbf{p}}(u)$  i parametri devono rispettare:

$$\eta_i \in \mathbb{R}^+ \quad \text{con} \quad i = 1, 2.$$

Quindi dalle equazioni (2.6c), (2.6d), (2.11), (2.14) e (2.15) si può scrivere

$$\alpha_1 = \eta_1 \cos \theta_A \quad (2.16)$$

$$\beta_1 = \eta_1 \sin \theta_A \quad (2.17)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 + 7\alpha_7 + 8\alpha_8 + 9\alpha_9 = \eta_2 \cos \theta_B \quad (2.18)$$

$$\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4 + 5\beta_5 + 6\beta_6 + 7\beta_7 + 8\beta_8 + 9\beta_9 = \eta_2 \sin \theta_B \quad (2.19)$$

Anche in questo caso si riescono a determinare altri due coefficienti del sistema (2.6):  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ .

Ricordando la definizione geometrica di curvatura derivante dalla teoria delle curve planari si può scrivere

$$\kappa(u) = \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\alpha}\beta}{(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^{3/2}}(u). \quad (2.20)$$

La definizione di  $\ddot{\alpha}(u)$  e  $\ddot{\beta}(u)$  si ottiene mediante derivazione esplicita rispetto ad  $u$  della relazione (2.11):

$$\ddot{\mathbf{p}}(u) = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}(u) \\ \ddot{\beta}(u) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

quindi, esplicitamente:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(u) = & 2\alpha_2 + 6\alpha_3u + 12\alpha_4u^2 + 20\alpha_5u^3 + 30\alpha_6u^4 + \\ & + 42\alpha_7u^5 + 56\alpha_8u^6 + 72\alpha_9u^7 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}(u) = & 2\beta_2 + 6\beta_3u + 12\beta_4u^2 + 20\beta_5u^3 + 30\beta_6u^4 + \\ & + 42\beta_7u^5 + 56\beta_8u^6 + 72\beta_9u^7. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Analizzando l'equazione (2.6e) si ottiene

$$\frac{2\alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_1}{\eta_1^3} = \kappa_A. \quad (2.24)$$

L'equazione appena introdotta, apparentemente, sembrerebbe non lineare: si può notare che l'equazione risulta lineare nei parametri  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  andando a sostituire in (2.24) i risultati trovati in (2.16) e (2.17).

Dall'equazione (2.6f) si ricava un'equazione necessaria a garantire il soddisfacimento della condizione al contorno per  $\kappa_B$ , per motivi tipografici la si esprime in forma compatta

$$\kappa(1) = \frac{\dot{\alpha}(1)\ddot{\beta}(1) - \ddot{\alpha}(1)\dot{\beta}(1)}{\eta_2^3} = \kappa_B. \quad (2.25)$$

Situazione analoga si ha per le equazioni (2.6g) - (2.6j) dove sono definite le condizioni di interpolazione per la derivata e la derivata seconda di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$ . Per esplicitare le equazioni si devono introdurre le funzioni geometriche per il calcolo della derivata di curvatura (2.26) e derivata seconda di curvatura (2.27) ed anche le funzioni  $\ddot{\mathbf{p}}(u)$  in (2.28) e  $\ddot{\mathbf{p}}(u)$  in (2.31).

$$\frac{d\kappa}{du}(u) = \frac{(\dot{\alpha}\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}\dot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - 3(\dot{\alpha}\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}\dot{\beta})(\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \dot{\beta}\ddot{\beta})}{(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^{5/2}}(u) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\kappa}{du^2}(u) = & \frac{1}{(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^{9/2}} \left[ (\dot{\alpha}\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}\dot{\beta} + \ddot{\alpha}\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}\ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^2 - \right. \\ & -7(\dot{\alpha}\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}\dot{\beta})(\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \dot{\beta}\ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - \\ & -3(\dot{\alpha}\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}\dot{\beta})(\ddot{\alpha}^2 + \ddot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \dot{\beta}\ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \\ & \left. +18(\dot{\alpha}\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}\dot{\beta})(\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \dot{\beta}\ddot{\beta})^2 \right] (u) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(u) = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}(u) \\ \ddot{\beta}(u) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

con

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(u) = & 6\alpha_3 + 24\alpha_4u + 60\alpha_5u^2 + 120\alpha_6u^3 + \\ & + 210\alpha_7u^4 + 336\alpha_8u^5 + 509\alpha_9u^6 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}(u) = & 6\beta_3 + 24\beta_4u + 60\beta_5u^2 + 120\beta_6u^3 + \\ & + 210\beta_7u^4 + 336\beta_8u^5 + 509\beta_9u^6. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Infine

$$\ddot{\mathbf{p}}(u) = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}(u) \\ \ddot{\beta}(u) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

con

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{\alpha}}(u) = & 24\alpha_4 + 120\alpha_5u + 360\alpha_6u^2 + \\ & + 840\alpha_7u^3 + 1680\alpha_8u^4 + 3024\alpha_9u^5 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{\beta}}(u) = & 24\beta_4 + 120\beta_5u + 360\beta_6u^2 + \\ & + 840\beta_7u^3 + 1680\beta_8u^4 + 3024\beta_9u^5. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Questo conclude la trattazione delle condizioni di interpolazione geometriche. Riassumendo si sono ricavate fino ad ora 14 equazioni che coinvolgono tutte le variabili del sistema. Si è riuscito a ricavare il valore di 4 di queste variabili che sono espresse nelle formule (2.7), (2.8), (2.16) e (2.17).

Come già accennato in precedenza le sole condizioni di interpolazione geometrica non sono sufficienti per ottenere una soluzione univoca del sistema (2.6).

È essenziale introdurre altre condizioni di interpolazione mediante l'aggiunta di parametri matematici appositi. La soluzione proposta prevede di inserire i parametri  $\eta_i$  con  $i = 1, \dots, 8$  interpretabili come la misura della velocità matematica della curva nei punti iniziale e finale e le sue successive derivate. I primi due parametri sono già stati introdotti e sono indispensabili per la definizione del versore tangente alla curva nei punti di interpolazione. I successivi parametri  $\boldsymbol{\eta}$  sono condizioni di interpolazione che esprimono i prodotti scalari dell'accelerazione, *jerk* e derivata del *jerk* con il versore tangente ai punti iniziale e finale della curva. Il *jerk* e la derivata del *jerk* rappresentano rispettivamente la derivata rispetto al tempo dell'accelerazione e la derivata seconda dell'accelerazione.

Le equazioni del sistema (2.6k), (2.6m) e (2.6o) possono essere esplicitate eseguendo il prodotto scalare, ottenendo le seguenti equazioni:

$$2\alpha_2 \cos \theta_A + 2\beta_2 \sin \theta_A = \eta_3 \quad (2.34)$$

$$6\alpha_3 \cos \theta_A + 6\beta_3 \sin \theta_A = \eta_5 \quad (2.35)$$

$$24\alpha_4 \cos \theta_A + 24\beta_4 \sin \theta_A = \eta_7 \quad (2.36)$$

Ora si è in grado di determinare i coefficienti  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  risolvendo le equazioni (2.24) e (2.34), si determinano  $\alpha_3$  e  $\beta_3$  dalla risoluzione di (2.26) valutata per  $u = 0$  e (2.35) infine si determinano  $\alpha_4$  e  $\beta_4$  dalle equazioni (2.27) valutata per  $u = 0$  e dall'equazione (2.36).

Il sistema (2.6) è quindi ridotto ad un sistema algebrico di 10 equazioni lineari nelle 10 incognite  $\alpha_i, \beta_i$  con  $i = 5, \dots, 9$ . Questo sistema ridotto ha la matrice dei coefficienti non singolare e si ottiene quindi un'unica soluzione al Problema 2.1. Per la risoluzione di tale sistema è richiesto l'utilizzo di un software di calcolo simbolico.

In Appendice A sono esposti i coefficienti polinomiali in forma chiusa che risolvono in modo univoco il Problema 2.1.

Dopo aver eseguito il calcolo esplicito dei coefficienti  $\alpha_i, \beta_i$  con  $i = 1, \dots, 9$ , si può introdurre la proposizione seguente.

**Proposizione 2.1.** *La curva parametrica  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  soddisfa ogni coppia di punti di interpolazione  $\mathbf{p}_A, \theta_A, \kappa_A, \dot{\kappa}_A, \ddot{\kappa}_A$  e  $\mathbf{p}_B, \theta_B, \kappa_B, \dot{\kappa}_B, \ddot{\kappa}_B$ , per ogni  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}$ . Dove  $\mathcal{H} := \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^6$  e  $\mathbb{R}_+$  denota l'insieme dei numeri reali positivi.*

Dato che il sistema (2.6) risulta lineare e con soluzione unica, la dimostrazione formale della Proposizione 2.1 è il risultato del calcolo esplicito dei coefficienti.

## 2.2 Calcolo dei coefficienti

Dal punto di vista implementativo, l'utilizzo delle  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline comporta la determinazione e la modifica di tutti i parametri  $\boldsymbol{\eta}$ . Molto spesso, per motivi di efficienza computazionale e per rendere meno complesso il problema di ottimizzazione dei parametri di ogni  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline che si pianifica, si utilizza una versione semplificata delle  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline dove gli unici parametri liberi rimangono  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Per comprendere la motivazione dell'utilizzo di questa semplificazione si faccia riferimento al Capitolo 4 dove è esposto il problema di ottimizzazione.

In seguito si riportano i coefficienti polinomiali in forma chiusa ottenuti dalla risoluzione del sistema (2.6) imponendo le seguenti ulteriori condizioni:

$$\eta_i = 0 \quad \text{con} \quad i = 3, \dots, 8.$$

$$\alpha_0 = x_A \tag{2.37}$$

$$\alpha_1 = \eta_1 \cos \theta_A \tag{2.38}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \eta_1^2 \kappa_A \sin \theta_A \tag{2.39}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A \sin \theta_A \tag{2.40}$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{24} \eta_1^4 (3 \kappa_A^3 + \ddot{\kappa}_A) \sin \theta_A \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \alpha_5 = & 126 (x_B - x_A) - 70 \eta_1 \cos \theta_A - 56 \eta_2 \cos \theta_B + \\ & + \left( \frac{35}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \end{aligned}$$

$$- \left( \frac{21}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \alpha_6 = & -420 (x_B - x_A) + 224 \eta_1 \cos \theta_A + 196 \eta_2 \cos \theta_B - \\ & - \left( \frac{105}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{20}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\ & + \left( \frac{77}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{23}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \alpha_7 = & 540 (x_B - x_A) - 280 \eta_1 \cos \theta_A - 260 \eta_2 \cos \theta_B + \\ & + \left( 63 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{15}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\ & - \left( 53 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{3}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{11}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \alpha_8 = & -315 (x_B - x_A) + 160 \eta_1 \cos \theta_A + 155 \eta_2 \cos \theta_B - \\ & - \left( 35 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + 4 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\ & + \left( \frac{65}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{7}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \alpha_9 = & 70 (x_B - x_A) - 35 \eta_1 \cos \theta_A - 35 \eta_2 \cos \theta_B + \\ & + \left( \frac{15}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{1}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\ & - \left( \frac{15}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{5}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\beta_0 = y_A \quad (2.47)$$

$$\beta_1 = \eta_1 \sin \theta_A \quad (2.48)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \eta_1^2 \kappa_A \cos \theta_A \quad (2.49)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A \cos \theta_A \quad (2.50)$$

$$\beta_4 = \frac{1}{24} \eta_1^4 (3 \kappa_A^3 + \ddot{\kappa}_A) \cos \theta_A \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \beta_5 = & 126 (y_B - y_A) - 70 \eta_1 \sin \theta_A - 56 \eta_2 \sin \theta_B - \\ & - \left( \frac{35}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{21}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \beta_6 = & -420 (y_B - y_A) + 224 \eta_1 \sin \theta_A + 196 \eta_2 \sin \theta_B + \\ & + \left( \frac{105}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{20}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\ & - \left( \frac{77}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{23}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \beta_7 = & 540 (y_B - y_A) - 280 \eta_1 \sin \theta_A - 260 \eta_2 \sin \theta_B - \\ & - \left( 63 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{15}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\ & + \left( 53 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{3}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{11}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \beta_8 = & -315 (y_B - y_A) + 160 \eta_1 \sin \theta_A + 155 \eta_2 \sin \theta_B + \\ & + \left( 35 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + 4 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\ & - \left( \frac{65}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{7}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \beta_9 = & 70 (y_B - y_A) - 35 \eta_1 \sin \theta_A - 35 \eta_2 \sin \theta_B - \\ & - \left( \frac{15}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{1}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\ & + \left( \frac{15}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{5}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B. \end{aligned} \quad (2.56)$$

I parametri  $\eta_i$ , con  $i = 1, 2$  che compaiono in (2.37) - (2.56) possono essere liberamente scelti e influenzano la forma del percorso generato, senza però violare le condizioni di interpolazione agli estremi. Possono essere raccolti in un vettore bidimensionale  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2]^T$  e la curva parametrica (2.1) - (2.2) può essere denotata per brevità di notazione come  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  o, informalmente,  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline semplificata. Il vettore  $\boldsymbol{\eta}$  ha dominio in  $\mathcal{H} \doteq \mathbb{R}_+^2$  ( $\mathbb{R}_+$  denota l'insieme dei numeri reali positivi).

I coefficienti riportati in (2.37) - (2.56) sono dedotti risolvendo le equazioni non lineari del sistema (2.6) associate alle condizioni sui punti di interpolazione.

## 2.3 Generalizzazione sulle $\boldsymbol{\eta}^k$ -spline

Il concetto di continuità geometrica di curve planari o percorsi, introdotti nella Sezione 1.2 può essere generalizzato come segue.

**Definizione 2.1** (curve  $G^k$ ;  $k \geq 2$ ). *Una curva parametrica  $\mathbf{p}(u)$  ha una continuità geometrica di ordine  $k$ , e diremo che  $\mathbf{p}(u)$  è una curva di ordine  $G^k$ , se  $\mathbf{p}(u)$  è una curva di ordine  $G^{k-1}$ ,  $D^k \mathbf{p}(\cdot) \in C^p([u_0, u_1])$  e  $D^{k-2} \kappa(\cdot) \in C^0([0, s_f])$ .*

**Definizione 2.2** (percorsi  $G^k$ ;  $k \geq 2$ ). *Un insieme di punti sul piano cartesiano è un percorso di classe  $G^k$  se esiste una curva parametrica di classe  $G^k$  che è l'immagine del percorso dato.*

Informalmente, la continuità geometrica di ordine  $k$  implica la continuità della curvatura fino all'ordine  $k - 2$ . Il problema dell'interpolazione polinomiale di ordine  $G^k$  può essere visto come naturale generalizzazione del problema di interpolazione geometrica di ordine 4 già descritto in Problema 2.1

**Problema 2.2** (Interpolazione polinomiale di classe  $G^k$ ). *Determinare la curva polinomiale di ordine minimo che interpola due punti terminali  $\mathbf{p}_A = [x_A \ y_A]^T$  e  $\mathbf{p}_B = [x_B \ y_B]^T$  con associati i versori tangenti definiti dagli angoli  $\theta_A$  e  $\theta_B$  e le derivate di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $D^i \kappa_A$  e  $D^i \kappa_B$  per  $i = 0, 1, \dots, k - 2$ . Tutti i dati di interpolazione possono essere assegnati arbitrariamente.*

Dalla determinazione delle curve  $\boldsymbol{\eta}^i$ -spline per  $i = 0, \dots, 4$  (come è evidenziato in [2]) si può inferire che le generiche  $\boldsymbol{\eta}^k$ -spline sono polinomi di ordine  $2k - 1$  e la loro parametrizzazione dipende dal vettore  $\boldsymbol{\eta}$  con  $2k$  componenti ( $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^{2(k-1)}$ ). Per generare le espressioni in forma chiusa delle  $\boldsymbol{\eta}^k$ -spline sono necessarie procedure di algebra svolte al calcolatore.

Formalmente si possono definire i **Percorsi  $\boldsymbol{\eta}^k$**  come l'insieme di tutti i percorsi formati dalle  $\boldsymbol{\eta}^k$ -spline per ogni  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^{2(k-1)}$  e per qualunque punto di interpolazione. Vale anche la seguente proprietà.

**Proprietà 2.1.** *Percorso  $\eta^k \subset \text{Percorso } \eta^{k+1}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .*

Alla luce di quanto affermato, il sistema introdotto in (2.6) può essere generalizzato nel modo seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_A \end{array} \right. \quad (2.57a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_B \end{array} \right. \quad (2.57b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}}(0) = \eta_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.57c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}}(1) = \eta_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.57d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(0) = \kappa_A \end{array} \right. \quad (2.57e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(1) = \kappa_B \end{array} \right. \quad (2.57f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{(k-2)}\kappa}{ds^{(k-2)}}(0) = \kappa_A^{(k-2)} \end{array} \right. \quad (2.57g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{(k-2)}\kappa}{ds^{(k-2)}}(1) = \kappa_B^{(k-2)} \end{array} \right. \quad (2.57h)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \ddot{\mathbf{p}}(0), \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \rangle = \eta_3 \end{array} \right. \quad (2.57i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \ddot{\mathbf{p}}(1), \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \rangle = \eta_4 \end{array} \right. \quad (2.57j)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{p}^{(k)}(0), \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \rangle = \eta_{2k-1} \end{array} \right. \quad (2.57k)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{p}^{(k)}(1), \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \rangle = \eta_{2k} \end{array} \right. \quad (2.57l)$$

dove  $\frac{d^{(k-2)}\kappa}{ds^{(k-2)}}(\cdot)$  indica la derivata della curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$  di ordine  $k - 2$  mentre  $\mathbf{p}^{(k)}(\cdot)$  indica la derivata di  $\mathbf{p}$  rispetto ad  $u$  di ordine  $k$ .

## 2.4 Esempi di percorsi

Per riuscire ad individuare in che modo i parametri di interpolazione influenzano l'andamento della curva  $\eta^4$ -spline appena introdotta si mostrano alcuni grafici utili per capire il significato fisico dei parametri che definiscono la curva.

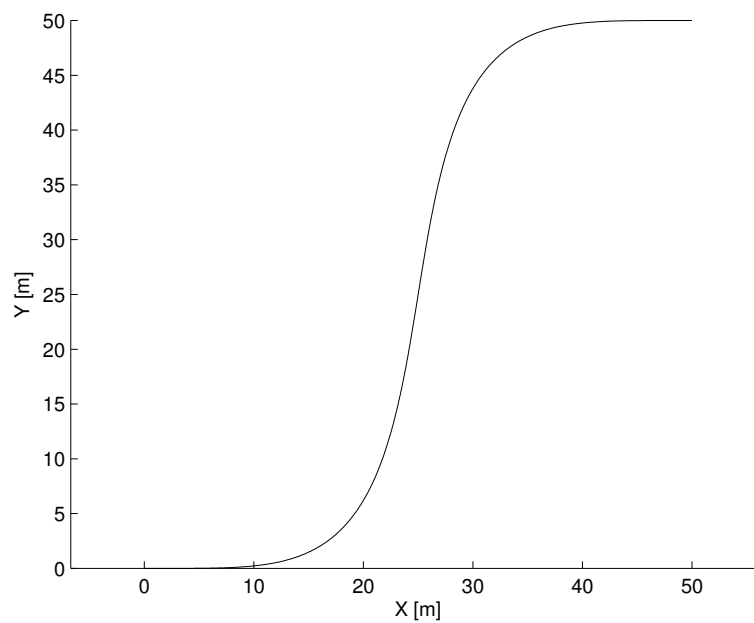


Figura 2.2: Esempio di  $\eta^4$ -spline

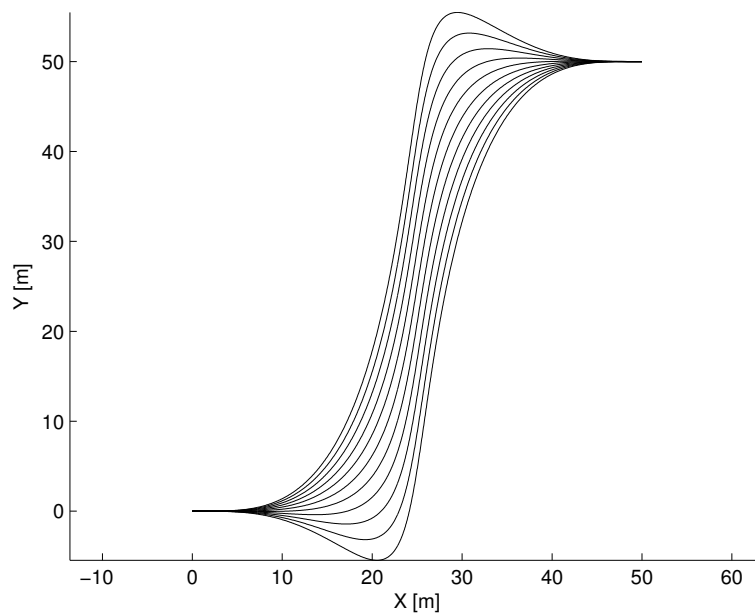


Figura 2.3: Fascio di  $\eta^4$ -spline al variare di  $\check{\kappa}_A$  e  $\check{\kappa}_B$

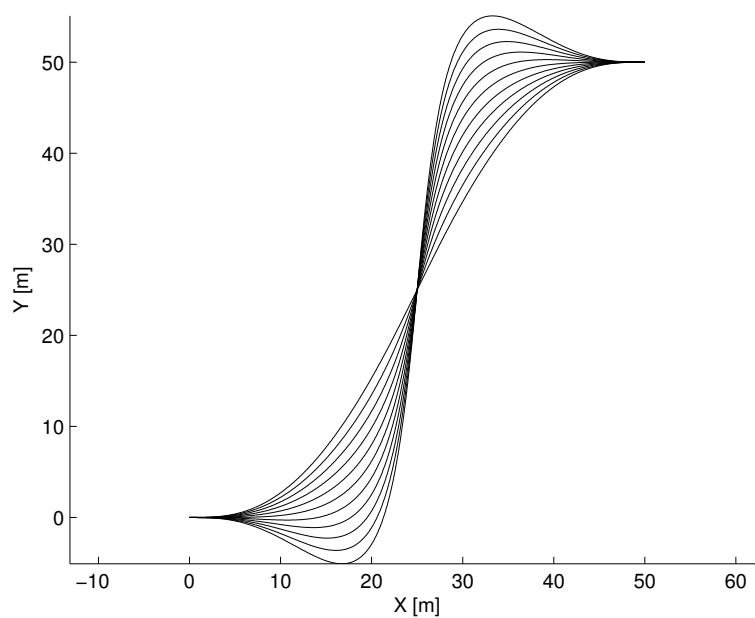


Figura 2.4: Fascio di  $\eta^4$ -spline al variare di  $\check{\kappa}_A$  e  $\check{\kappa}_B$

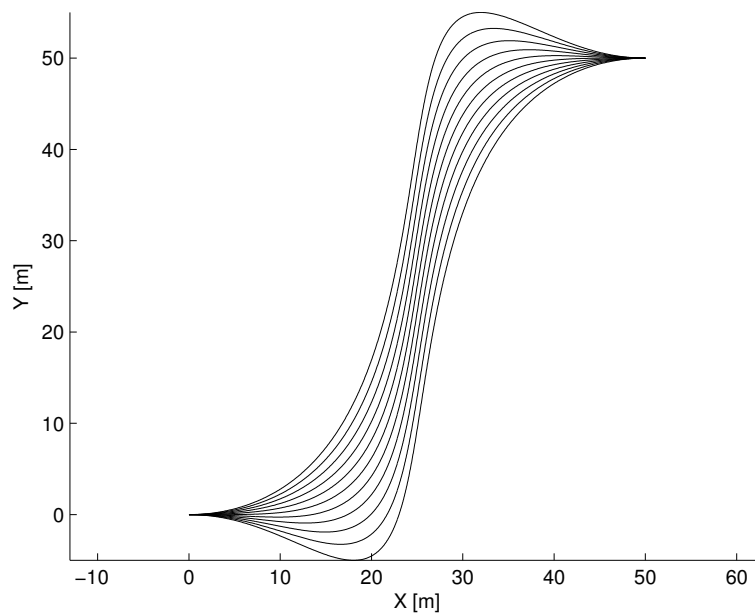


Figura 2.5: Fascio di  $\eta^4$ -spline al variare di  $\kappa_A$  e  $\kappa_B$

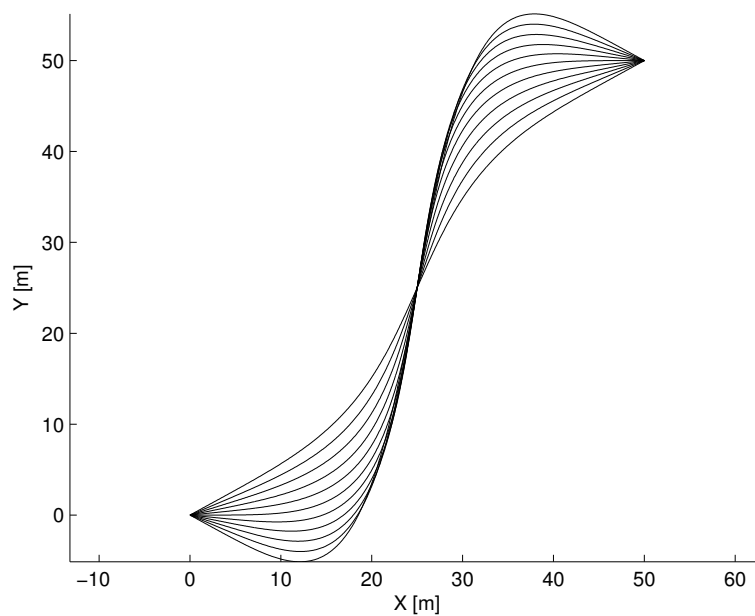


Figura 2.6: Fascio di  $\eta^4$ -spline al variare di  $\theta_A$  e  $\theta_B$

Nella Figura 2.2 è presentato un esempio di  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline ottenuta con i seguenti parametri di interpolazione:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_A &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{c}_B &= [50 \quad 50 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.\end{aligned}$$

dove il vettore di condizioni di interpolazione è composto da

$$\mathbf{c} = [x_1 \quad y_1 \quad \theta_1 \quad \kappa_1 \quad \dot{\kappa}_1 \quad \ddot{\kappa}_1]^T$$

rispettivamente espresso in  $[m]$ ,  $[m]$ ,  $[rad]$ ,  $[\frac{rad}{m}]$ ,  $[\frac{rad}{ms}]$ ,  $[\frac{rad}{ms^2}]$  e valutato nel punto iniziale e finale. Un'euristica stabilisce che una buona scelta per i parametri  $\boldsymbol{\eta}$  è la distanza geometrica tra il punto iniziale e finale. La distanza è calcolata come norma euclidea degli estremi della curva cioè

$$\|\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B\| = 70.7107 \text{ m}.$$

Quindi il vettore  $\boldsymbol{\eta}$  diverrà

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \quad \eta_2]^T = [70.7107 \quad 70.7107]^T. \quad (2.58)$$

In Figura 2.3 è rappresentato un fascio di  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline al variare del valore della derivata seconda di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco. Si nota che il parametro  $\ddot{\kappa}$  influenza la forma della curva a fronte di limitate variazioni del parametro stesso. Le varie curve sono ottenute da quella centrale (uguale a quella presentata in Figura 2.2) facendo variare  $\ddot{\kappa}_A$  e  $\ddot{\kappa}_B$  in un intervallo compreso tra  $\pm 0.005 \text{ rad/ms}^2$ . Le curve più esterne, quelle che presentano i vettori di condizioni di interpolazione  $\mathbf{c}_A = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \pm 0.005]^T$  e  $\mathbf{c}_B = [50 \quad 50 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \pm 0.005]^T$ , mostrano un comportamento meno dolce, confermato da due tratti di sovralongazione.

La Figura 2.4 mostra invece il fascio di  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline al variare della derivata di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco. Si nota che la curva viene influenzata in modo differente al variare di  $\dot{\kappa}$ . Le curve risultanti hanno un andamento più dolce. Per ottenere i grafici sono stati fatti variare i parametri  $\dot{\kappa}_A$  e  $\dot{\kappa}_B$  in un intervallo compreso tra  $\pm 0.02 \text{ rad/ms}$  ottenendo i grafici più esterni

con i vettori di condizioni di interpolazione pari a  $\mathbf{c}_A = [0\ 0\ 0\ 0 \pm 0.02\ 0]^T$  e  $\mathbf{c}_B = [50\ 50\ 0\ 0 \pm 0.02\ 0]^T$ .

Stesso ragionamento è stato applicato per ottenere le Figure 2.5 e 2.6. Si può notare che la variazione dell'orientazione  $\theta$  provoca un aumento della curvatura massima dell' $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline per compensare all'orientazione non ottimale iniziale e finale. Il fascio in Figura 2.5 è ottenuto con una variazione dei parametri  $\kappa_A$  e  $\kappa_B$  in un intervallo  $[-0.05\ rad/m, 0.05\ rad/m]$  mentre in Figura 2.6 l'orientazione nei punti estremi varia tra  $\pm 0.5\ rad$ .

# Capitolo 3

## Controllo *feedforward* su percorso assegnato

*In questo capitolo si tratta della generazione in modo feedforward dei segnali di controllo per il modello cinematico del veicolo con rimorchio. Il controllo sarà sviluppato per vincolare il veicolo con rimorchio a seguire un percorso di classe  $G^4$  generato mediante le  $\eta^4$ -spline.*

La pianificazione del moto di un veicolo con rimorchio ha ovviamente il fine della guida automatica. Per questo, gli strumenti matematici utilizzati devono essere vincolati ad un ambiente verosimile.

### 3.1 Ambiente di lavoro

La generazione delle  $\eta^4$ -spline su cui si muove il veicolo con rimorchio non può essere qualunque ma deve seguire delle limitazioni fisiche che possiede il mezzo reale. Inoltre l'ambiente in cui si muove il veicolo con rimorchio non è libero ma vi è la presenza di ostacoli sul percorso.

La rappresentazione degli ostacoli è un problema molto complesso vista l'alta diversificazione di ciò che può essere considerato ostacolo. Si è deciso di adottare una semplificazione degli ostacoli ai soli poligoni convessi. Questa scelta

è dovuta alla semplicità con cui si riescono ad adottare politiche di *Obstacle Avoidance*. Ovviamente gli ostacoli complessi possono essere rappresentati mediante l'unione di diversi poligoni convessi, riuscendo in questo modo a coprire la maggior parte dei casi reali.

La funzione di *Obstacle Avoidance* risulta molto semplificata dall'adozione di ostacoli come poligoni convessi, per misurare se il veicolo con rimorchio viene a contatto con un ostacolo è sufficiente eseguire una intersezione tra poligoni. Se questa intersezione risulta vuota in ogni tratto del percorso pianificato, si è sicuri che il veicolo percorrerà una traiettoria sicura.

In Figura 3.1 è rappresentato lo schema di principio del veicolo con rimorchio immerso nell'ambiente con ostacoli. Mentre in Figura 3.2 è rappresentato uno

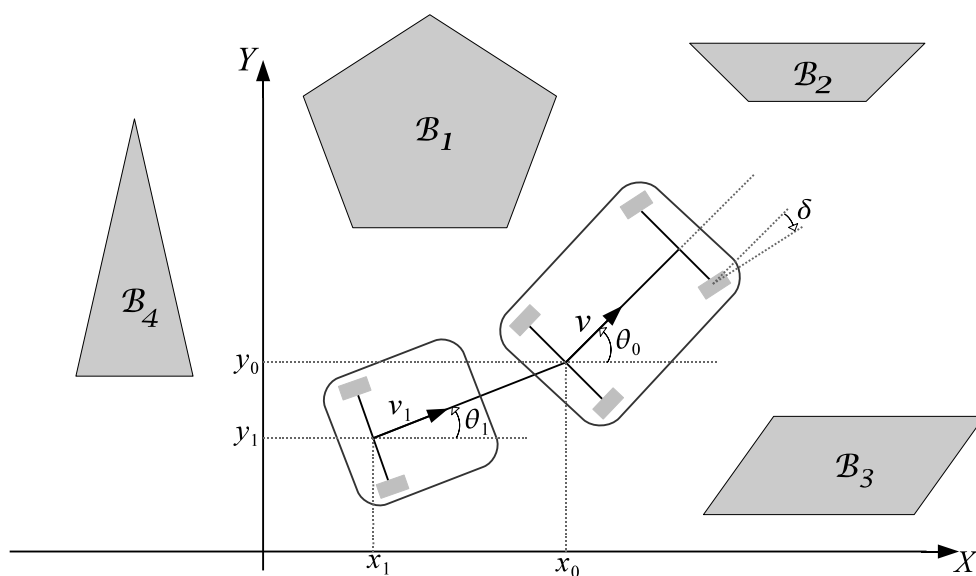


Figura 3.1: Ambiente con la rappresentazione matematica degli ostacoli

scenario utilizzato in simulazione: gli ostacoli sono rappresentati come rettangoli di colore rosso mentre il veicolo con rimorchio è rappresentato dai rettangoli verdi (veicolo) e gialli (rimorchio) infine la traiettoria pianificata è rappresentata dalla curva di colore blu: una segna il percorso seguito dal veicolo e l'altra quella del rimorchio.

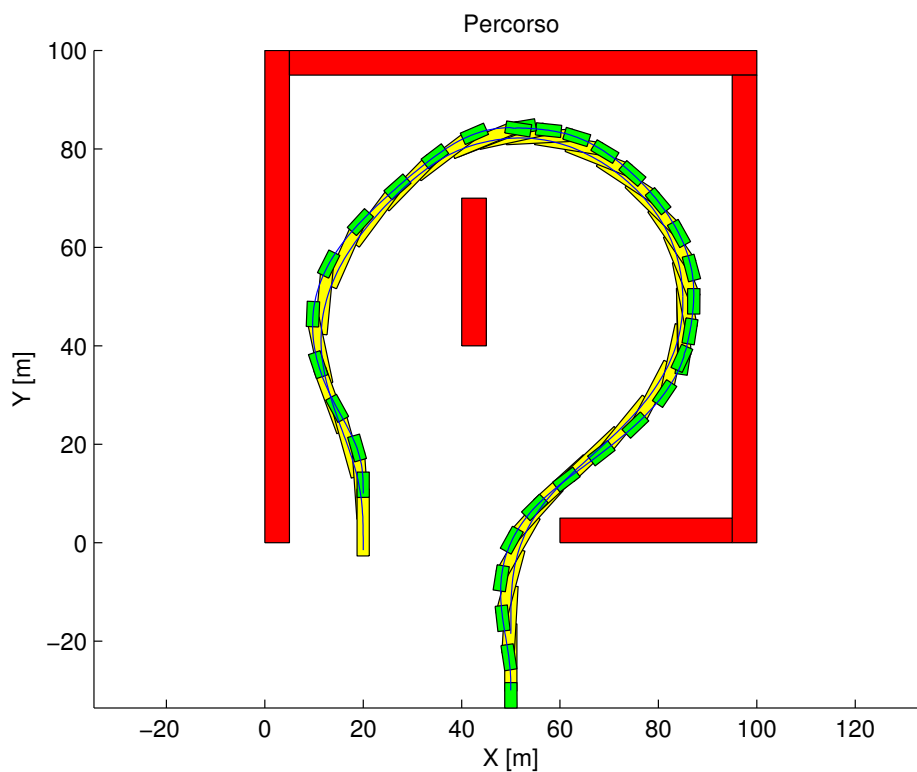


Figura 3.2: Ambiente di lavoro per la simulazione

## 3.2 Modello cinematico

Come già anticipato nella Sezione 1.3, il modello cinematico del veicolo con rimorchio risulta essere (si faccia riferimento alla Figura 1.2)

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v \cos \theta_0 \\ \dot{y}_0 = v \sin \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = \frac{v}{d_0} \tan \delta \\ \dot{\theta}_1 = \frac{v}{d_1} \sin(\theta_0 - \theta_1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Gli ingressi del sistema, quindi i controlli, sono rappresentati da  $v(t)$  e  $\delta(t)$  rispettivamente velocità del punto posteriore e angolo di sterzata del veicolo trainante.

Per riuscire a descrivere la traiettoria percorsa dal veicolo è necessario introdurre il concetto di stato esteso.

### 3.3 Stato esteso

Lo stato del sistema (3.1) dal punto di vista matematico è rappresentato dalle variabili

$$\mathbf{x} = [x_0(t) \ y_0(t) \ \theta_0(t) \ \theta_1(t)]^T .$$

Per convenienza nella trattazione si introduce il cosiddetto *stato esteso* ossia lo stato del sistema con l'aggiunta degli ingressi e delle derivate degli stessi. In particolare, per il caso in esame, lo stato esteso del sistema (3.1) sarà rappresentato dal vettore

$$\mathbf{x} = [x_0(t) \ y_0(t) \ \theta_0(t) \ \theta_1(t) \ v(t) \ \dot{v}(t) \ \delta(t) \ \dot{\delta}(t)]^T \quad (3.2)$$

Il problema della pianificazione risulta quindi essere un problema di generazione di un percorso di classe  $G^4$  che interpola due stati estesi arbitrari

$$\mathcal{A} = [x_{0A} \ y_{0A} \ \theta_{0A} \ \theta_{1A} \ v_A \ \dot{v}_A \ \delta_A \ \dot{\delta}_A]^T \quad (3.3)$$

$$\mathcal{B} = [x_{0B} \ y_{0B} \ \theta_{0B} \ \theta_{1B} \ v_B \ \dot{v}_B \ \delta_B \ \dot{\delta}_B]^T . \quad (3.4)$$

Da questi dati è possibile risolvere il problema di pianificazione mediante  $\eta^4$ -*spline* perchè si riescono ad ottenere i valori di curvatura e derivata di curvatura iniziali e finali richiesti per ottenere la parametrizzazione delle spline che interpolano i due stati estesi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  partendo dal punto medio dell'asse ruota posteriore. Le relazioni geometriche sono espresse nelle seguenti formule.

$$\kappa_{1A} = \frac{1}{d_1} \tan(\theta_{0A} - \theta_{1A}) \quad (3.5)$$

$$\kappa_{1B} = \frac{1}{d_1} \tan(\theta_{0B} - \theta_{1B}) \quad (3.6)$$

$$\dot{\kappa}_{1A} = \frac{1}{d_1} \frac{\frac{1}{d_0} \tan \delta_A - \frac{1}{d_1} \sin(\theta_{0A} - \theta_{1A})}{\cos^3(\theta_{0A} - \theta_{1A})} \quad (3.7)$$

$$\dot{\kappa}_{1B} = \frac{1}{d_1} \frac{\frac{1}{d_0} \tan \delta_B - \frac{1}{d_1} \sin(\theta_{0B} - \theta_{1B})}{\cos^3(\theta_{0B} - \theta_{1B})} \quad (3.8)$$

Per definire in modo completo il problema, si necessita di definire anche tutti i rimanenti parametri di interpolazione che sono necessari per definire una  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline*, si rimanda alla sezione successiva per completare la determinazione dei parametri di interpolazione.

### 3.4 Determinazione dei parametri di interpolazione

Lo stato esteso associato al veicolo con rimorchio nei punti di interpolazione prevede la creazione di un percorso di classe  $G^4$  partendo dagli stati del modello cinematico presentato in (3.1). Come si è visto nel Capitolo 2, lo strumento utilizzato per la creazione di questo percorso ( $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline*) utilizza condizioni iniziali e finali che dipendono dai parametri  $\mathbf{p}(u)$ ,  $\theta(u)$ ,  $\kappa(u)$ ,  $\dot{\kappa}(u)$  e  $\ddot{\kappa}(u)$  e non dallo stato esteso del modello. È quindi necessario procedere, prima della generazione del percorso, con il calcolo delle condizioni agli estremi delle  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline*.

La determinazione di tali parametri è dipendente dalla direzione di marcia del veicolo, bisogna quindi porre attenzione alla marcia del veicolo stesso. Inoltre lo stato esteso coinvolge la posizione e l'orientazione del punto  $(x_0, y_0)$  che sono riferiti al veicolo trainante mentre la pianificazione del percorso avviene sul punto mediano dell'asse ruota del rimorchio  $(x_1, y_1)$ . Per riuscire a garantire la continuità dei controlli, è necessario eseguire una trasformazione dei parametri dello stato esteso per ottenere i valori iniziali e finali necessari alla  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline*.

La marcia del veicolo è indispensabile per la definizione di curvatura iniziale

e finale del tratto perchè è definita nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_{min}} & \text{se } \textit{marcia} = \textit{“avanti”} \\ -\frac{1}{R_{min}} & \text{se } \textit{marcia} = \textit{“indietro”}. \end{cases} \quad (3.9)$$

### 3.4.1 Marcia avanti

Se il veicolo con rimorchio percorre il percorso in avanti, si possono determinare le condizioni di interpolazione per il punto mediano dell'asse ruota posteriore mediante le seguenti equazioni:

$$x_{1A} = x_{0A} - d_1 \cos \theta_{1A} \quad (3.10)$$

$$y_{1A} = x_{0A} - d_1 \sin \theta_{1A} \quad (3.11)$$

$$x_{1B} = x_{0B} - d_1 \cos \theta_{1B} \quad (3.12)$$

$$y_{1B} = x_{0B} - d_1 \sin \theta_{1B}. \quad (3.13)$$

È possibile anche determinare le condizioni iniziali e finali di curvatura

$$\kappa_{1A} = \frac{1}{d_1} \tan (\theta_{0A} - \theta_{1A}) \quad (3.14)$$

$$\kappa_{1B} = \frac{1}{d_1} \tan (\theta_{0B} - \theta_{1B}). \quad (3.15)$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali e finali di derivata e derivata seconda di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$ , non esiste una dipendenza dalla direzione di marcia del veicolo. Le equazioni sono già state riportate nelle equazioni (3.7) e (3.8).

### 3.4.2 Marcia indietro

Se invece la marcia del veicolo è all'indietro le equazioni precedenti (3.10) - (3.15) si modificano nel seguente modo:

$$x_{1A} = x_{0A} + d_1 \cos \theta_{1A} \quad (3.16)$$

$$y_{1A} = x_{0A} + d_1 \sin \theta_{1A} \quad (3.17)$$

$$x_{1B} = x_{0B} + d_1 \cos \theta_{1B} \quad (3.18)$$

$$y_{1B} = x_{0B} + d_1 \sin \theta_{1B} \quad (3.19)$$

$$\kappa_{1A} = -\frac{1}{d_1} \tan(\theta_{0A} - \theta_{1A}) \quad (3.20)$$

$$\kappa_{1B} = -\frac{1}{d_1} \tan(\theta_{0B} - \theta_{1B}). \quad (3.21)$$

## 3.5 Vincoli

Dal punto di vista matematico, il modello cinematico del veicolo con rimorchio non presenta vincoli sul dominio delle variabili di stato. Questo però è ovviamente irrealistico perchè il mezzo meccanico ha dei vincoli fisici che non traspaiono dalle equazioni cinematiche. In aggiunta, dato che gli ingressi del sistema sono la velocità lineare  $v(t)$  e l'angolo di sterzata  $\delta(t)$  della motrice, si vuole ottenere un controllo continuo per avere un movimento fluido del veicolo.

A tale scopo sono stati introdotti vincoli di massimo valore di sterzata  $\delta_{max}$  del veicolo trainante, massimo valore di curvatura ( $\kappa_{max}$ ), derivata ( $\dot{\kappa}_{max}$ ) e derivata seconda di curvatura rispetto alla lunghezza dall'arco ( $\ddot{\kappa}_{max}$ ).

Per il veicolo motrice si è determinato il massimo valore di curvatura come l'inverso del minimo raggio di curvatura ( $R_{min}$ ) di un veicolo prototipo preso ad esempio. La formula è quindi

$$\kappa_{max} = \frac{1}{R_{min}} \quad (3.22)$$

Per determinare il vincolo di massima sterzata della motrice si utilizza la formula

$$\delta_{max} = \arctan(\kappa_{max} d_0). \quad (3.23)$$

Il massimo valore di derivata di curvatura lungo la lunghezza dell'arco si determina mediante l'esplicita differenziazione della relazione (3.23) rispetto al tempo. L'espressione risulta

$$\dot{\kappa}_{max} = \frac{\dot{\delta}_{max}}{d_0} \frac{1}{\cos^2 \delta_{max}} \quad (3.24)$$

dove  $\dot{\delta}_{max}$  si calcola in modo empirico, dato che rappresenta la “velocità” di sterzata del volante della motrice, grandezza difficilmente misurabile.

Anche il vincolo sulla derivata seconda di curvatura del veicolo motrice deve essere calcolato in modo empirico a causa dell'impossibilità di misurazione diretta della grandezza fisica che rappresenta: l'accelerazione angolare.

Per quanto riguarda i vincoli presenti sul rimorchio è impossibile determinare il raggio di curvatura minimo perchè dipende dal tipo di motrice. Per evitare di introdurre vincoli non realistici si è scelto di determinare il massimo angolo esistente tra la motrice e il rimorchio (denominandolo  $\delta_1$ ). Vale ovviamente la relazione

$$\delta_1 = \theta_0 - \theta_1.$$

Per evitare la condizione di slittamento delle ruote posteriori, si introduce il vincolo

$$|\delta_{1max}| < \frac{\pi}{2}. \quad (3.25)$$

che è già apparso nella definizione del Problema 2.1 e deve essere rispettato per mantenere valida la teoria sviluppata nel Capitolo 2. Il vincolo può essere definito lasciando una tolleranza per evitare di addossarsi troppo alla condizione limite dove non è garantita la validità della Proposizione 1.2. Ora si è in grado di definire il vincolo di curvatura massima del percorso seguito dal rimorchio

$$\kappa_{1max} = \frac{1}{d_1} \tan \delta_{1max} \quad (3.26)$$

e di conseguenza anche il vincolo di derivata di curvatura sul rimorchio

$$\dot{\kappa}_{1max} = \frac{\dot{\delta}_{1max}}{d_0} \frac{1}{\cos^2 \delta_{1max}}. \quad (3.27)$$

Anche per il rimorchio si calcolano in modo empirico  $\dot{\delta}_{1max}$  e il vincolo di derivata seconda di curvatura del rimorchio.

### 3.6 Algoritmo di inversione dinamica di percorso

Il controllo *feedforward* del veicolo con rimorchio ( $v(t)$  e  $\delta(t)$ ) che segue un percorso assegnato  $\Gamma$  può essere ottenuto mediante una procedura di inversione dinamica di percorso.

Bisogna fare attenzione che le funzioni  $v(t)$  e  $\delta(t)$ , soluzione del problema di controllo, sono associate al veicolo motrice, quindi la procedura di inversione dinamica di percorso deve determinare il percorso  $\Gamma_0$  riferito al veicolo trainante che è geometricamente dipendente dal percorso assegnato  $\Gamma$ .

La conoscenza di  $\Gamma_0$  e la sua lunghezza totale  $s_0$  permette di applicare la il metodo della decomposizione velocità-percorso, si veda l'articolo [1] in Bibliografia. Con questo metodo la generazione del profilo di velocità  $v(t)$  è indipendente dalla generazione del segnale di controllo di sterzata del veicolo  $\delta(t)$ .

Il segnale di sterzata può essere determinato sfruttando le proprietà geometriche del modello cinematico (3.1) relative ai percorsi  $\Gamma$  e  $\Gamma_0$ .

Seguendo la traccia esposta in [3], l'algoritmo di inversione dinamica di percorso può essere descritto dai seguenti tre passi:

**Passo 1)** *Determinare il percorso  $\Gamma_0$  del veicolo trainante.*

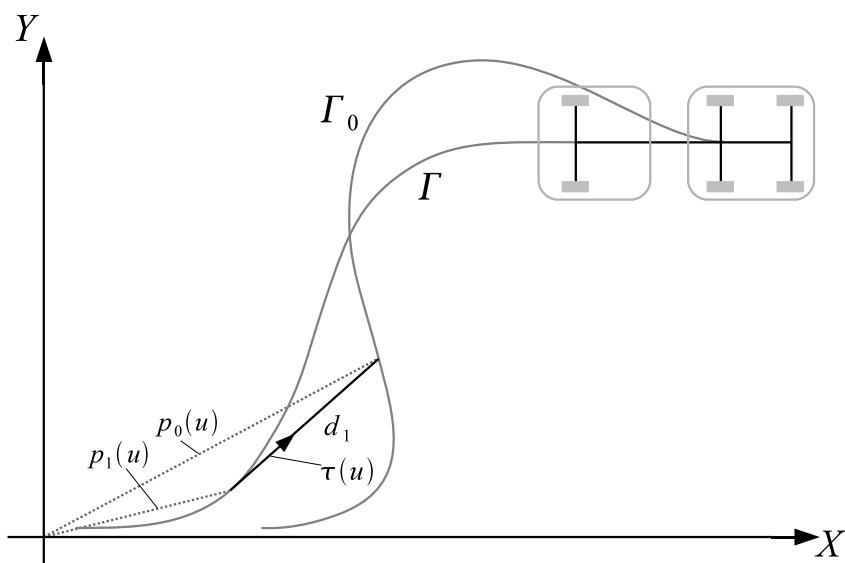
Considerando l'usuale parametrizzazione del percorso  $\Gamma$  come quella utilizzata per le  $\eta^4$ -*spline* si può dare la definizione di versore tangente alla curva  $\Gamma$  come

$$\tau(u) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(u)}{\|\dot{\mathbf{p}}(u)\|},$$

la parametrizzazione della curva  $\Gamma_0$  può essere ottenuta nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0(u) &= \mathbf{p}_1(u) + d_1 \tau_1(u) \\ &= \mathbf{p}_1(u) + d_1 \frac{\dot{\mathbf{p}}_1(u)}{\|\dot{\mathbf{p}}_1(u)\|}, \quad u \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La Figura 3.3 evidenzia il legame geometrico presente tra i percorsi  $\Gamma$  e  $\Gamma_0$ .


 Figura 3.3: Costruzione geometrica del percorso  $\Gamma_0$ 

**Passo 2)** *Determinare il controllo di velocità  $v_1(t)$ .*

Si può scegliere un qualsiasi segnale di classe  $C^1$  grazie alla validità della decomposizione velocità-percorso. La scelta ottimale di questo segnale è in funzione dell'obiettivo che si vuole perseguire nel moto del veicolo con rimorchio e può essere scelta per esempio per perseguire il tempo minimo rispettando determinati vincoli oppure può essere scelto un profilo *smooth* per evitare di sollecitare eccessivamente gli attuatori elettromeccanici ecc.

La velocità è riferita all'asse ruota del rimorchio. Il modello cinematico prevede però la determinazione del controllo  $v(t)$ , ossia la velocità lineare dell'asse ruota posteriore del veicolo trainante, si veda il *Passo 3* per la determinazione matematica.

**Passo 3)** *Determinare la funzione di sterzata ottimale  $\delta(t)$ .*

La determinazione della funzione di sterzata  $\delta(t)$  si ottiene dalla

soluzione del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \int_0^t v_1(\xi) d\xi = \int_0^u \|\dot{\mathbf{p}}_1(\xi)\| d\xi \\ \theta_0(t) - \theta_1(t) = \arg \frac{\dot{\mathbf{p}}_0(u)}{\|\dot{\mathbf{p}}_0(u)\|} - \arg \frac{\dot{\mathbf{p}}_1(u)}{\|\dot{\mathbf{p}}_1(u)\|} \\ \delta(t) = \arctan(d_0 \kappa(u)). \end{cases} \quad (3.29)$$

Ora manca la determinazione del valore di  $v(t)$ . Dopo aver definito al *Passo 2* la velocità  $v_1(t)$ , il controllo cercato può essere definito come segue

$$v(t) = \frac{v_1(t)}{\cos(\theta_0(t) - \theta_1(t))} \quad (3.30)$$

Il *Passo 3* dell'algoritmo permette di determinare i controlli richiesti. I controlli risultano essere di classe  $C^1$  perchè sono ottenuti come soluzione del Problema 2.1.

Per mostrare il risultato ottenuto si è scelto di eseguire il controllo *feedforward* su un percorso che rappresenta un cambio di corsia.

In Figura 3.4 è mostrato il percorso del veicolo con rimorchio. Definito lo stato esteso come nella relazione (3.2), il veicolo percorre una traiettoria dallo stato esteso iniziale  $\mathcal{A} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  allo stato esteso  $\mathcal{B} = [50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

La Figura 3.5 mostra invece il valore della variabile di controllo  $\delta(s)$  in funzione dell'ascissa curvilinea. Come si può notare la curva ottenuta è di classe  $C^1$  e presenta un andamento *smooth*.

Dato che la pianificazione della velocità risulta indipendente dalla pianificazione della sterzata, si può scegliere un qualsiasi controllo di classe  $C^1$  per  $v_1(t)$  in modo da ottenere un  $v(t)$  di classe  $C^1$  dalla risoluzione dell'equazione (3.30).

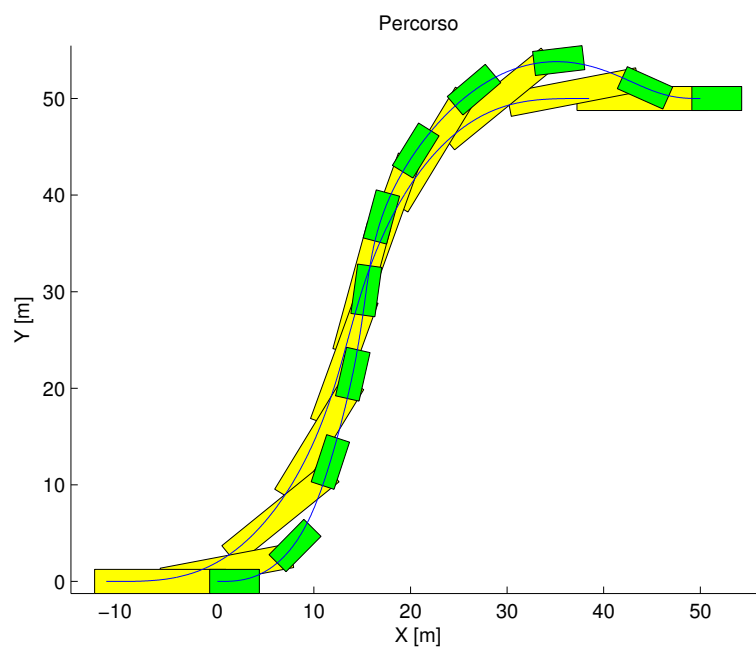


Figura 3.4: Cambio di corsia del veicolo con rimorchio

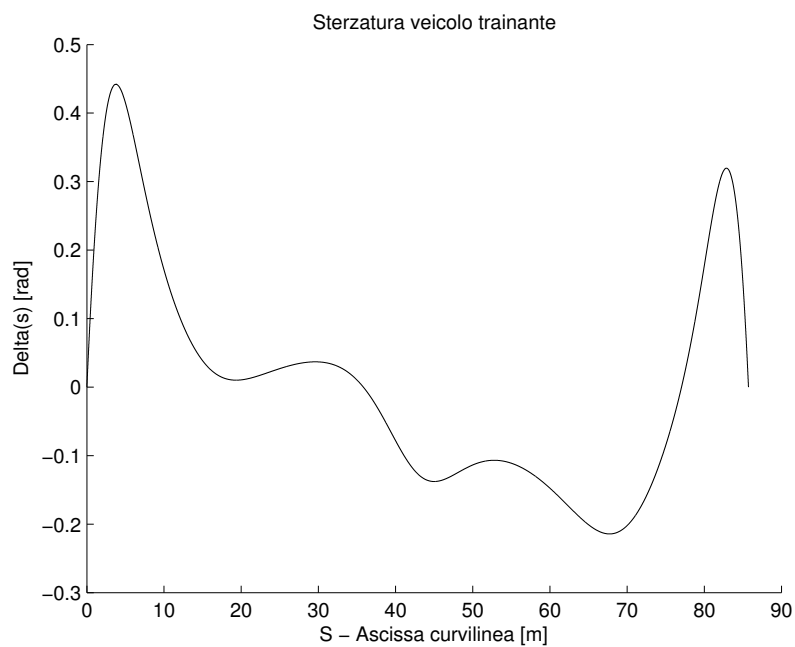


Figura 3.5: Controllo  $\delta(s)$  in funzione dell'ascissa curvilinea

## Capitolo 4

# Ottimizzazione dei parametri

*In questo capitolo si tratta dell'ottimizzazione dei parametri liberi della  $\eta^4$ -spline e della minimizzazione del massimo della curvatura e della derivata di curvatura della traiettoria compiuta dal rimorchio. Si illustra anche l'algoritmo necessario per l'implementazione di una funzione di obstacle avoidance.*

Dopo aver generato il percorso del rimorchio che interpola due stati estesi qualsiasi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  mediante l'utilizzo delle  $\eta^4$ -spline è sorto il problema di generare un percorso specifico che minimizzasse l'escursione massima dei controlli. Questo è stato pensato nell'ottica di evitare di ottenere dei controlli con comportamenti bruschi e elevato dispendio energetico.

In un contesto di *iterative steering*, è necessario generare una collezione di percorsi consecutivi tali che, nei vari punti di contatto, si mantengano le proprietà di continuità geometrica del quarto ordine necessarie per ottenere dei controlli di classe  $C^1$  per il veicolo con rimorchio. Oltretutto, in uno scenario realistico, suddividere il percorso desiderato in vari percorsi intermedi garantisce anche un comportamento più reattivo del veicolo in relazione all'aggiramento di ostacoli presenti nell'ambiente.

Nasce l'esigenza di introdurre, nel pianificatore del moto del veicolo, una funzione di ottimizzazione di alcuni parametri liberi del sistema. Si è scelto di ottimizzare i punti di interpolazione della derivata seconda di curvatura

della  $\eta^4$ -spline in modo da congiungere i gli stati estesi iniziale e finale con percorsi *smooth*. Si è anche cercato di minimizzare il massimo valore di curvatura e derivata di curvatura che assume il percorso del rimorchio nei vari tratti pianificati. Infine si sono ottimizzate anche le informazioni relative ai punti intermedi del percorso:  $\mathbf{p}_i = (x_{1i}, y_{1i})$ ,  $\theta_{1i}$ ,  $\kappa_i$ ,  $\dot{\kappa}_i$ ,  $\ddot{\kappa}_i$  per permettere di generare dei segnali di controllo sulla traiettoria complessiva senza discontinuità.

## 4.1 Problema di minimizzazione

Per definire il problema formale, seguendo la traccia esposta in [4], occorre esporre le seguenti definizioni.

**Definizione 4.1.** *Le coordinate che definiscono la posizione del veicolo (considerate come il punto mediano dell'asse posteriore), l'orientazione del veicolo rispetto al piano cartesiano  $\{X, Y\}$ , l'orientazione del rimorchio rispetto al piano cartesiano  $\{X, Y\}$  e l'angolo di sterzata delle ruote posteriori del veicolo  $\delta$  compongono il vettore delle configurazioni in questo modo:*

$$\mathbf{q} \doteq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \\ \theta_1 \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{Q} \quad (4.1)$$

dove

$$\mathcal{Q} \doteq \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[^2 \times [-\delta_M, +\delta_M]$$

è lo spazio delle configurazioni e  $\delta_M$  è il valore massimo di sterzata permesso dal veicolo.

In uno scenario di movimentazione del veicolo con rimorchio si può definire l'area di occupazione del veicolo con rimorchio, indicata con  $\mathcal{A}$ , come l'insieme di due rettangoli, uno per il veicolo ed uno per il rimorchio, che si

muovono nel piano cartesiano  $\{X, Y\}$ . Il corpo del veicolo con rimorchio  $\mathcal{A}$  occupa una porzione di  $\mathbb{R}^2$  che dipende dal vettore di configurazione  $\mathbf{q}$ , cioè  $\mathcal{A}(\mathbf{q}) \subset \mathbb{R}^2$ .

Definendo la curva  $i$ -esima, rappresentante il percorso del punto mediano dell'asse ruota del rimorchio, nel seguente modo

$$\mathbf{p}_i(u, \boldsymbol{\eta}_i) \equiv [p_{x,i}(u) \ p_{y,i}(u)]^T$$

dove la dipendenza dai parametri  $\boldsymbol{\eta}_i$  è stata omessa per non appesantire la notazione e la curva  $\Gamma_{0i}$ , rappresentante il percorso del punto mediano dell'asse ruota posteriore del veicolo trainante nel seguente modo

$$\mathbf{p}_{0i}(u, \boldsymbol{\eta}) \equiv [p_{0x,i}(u) \ p_{0y,i}(u)]^T$$

e utilizzando la stessa nomenclatura utilizzata nella trattazione dell'algoritmo di *Inversione dinamica di percorso*, si veda la Sezione 3.6 a riguardo, si può definire l'insieme delle aree di occupazione del veicolo con rimorchio lungo la collezione di percorsi definiti da  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline nel modo seguente.

**Definizione 4.2.** Con  $\mathcal{S}$  si indica l'insieme delle aree di occupazione del veicolo con rimorchio lungo l'intera sequenza di  $N$  spline, ed è definito dalla formula

$$\mathcal{S} \doteq \bigcup_{i=1}^N \mathcal{S}_i \doteq \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_N$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i &\doteq \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{p} \in \mathcal{A}(\mathbf{q}), \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{0x,i}(u) \\ p_{0y,i}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x,i}(u) \\ p_{y,i}(u) \end{bmatrix} + d_1 e^{j q_4}, \right. \\ &\quad q_3 = \arg(\dot{p}_{0x,i}(u) + j\dot{p}_{0y,i}(u)), \\ &\quad \left. q_4 = \arg(\dot{p}_{x,i}(u) + j\dot{p}_{y,i}(u)), u \in [0, 1] \right\}. \end{aligned}$$

Ora si definisce l'area di occupazione degli ostacoli nel seguente modo.

**Definizione 4.3.** Con  $\mathcal{O}$  si indica l'unione delle aree di occupazione dei  $k$  ostacoli, rappresentati come poligoni convessi, definito come

$$\mathcal{O} \doteq \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i \doteq \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k.$$

Si può quindi definire il problema di minimizzazione nel seguente modo.

**Problema 4.1.** *Data una collezione di percorsi di classe  $G^4$ ,  $\Gamma_i$  con  $i = 1, \dots, N$ , che interpolano gli stati estesi  $\mathcal{I}$  (iniziale) e  $\mathcal{F}$  (finale) e un insieme di condizioni di interpolazione  $\mathbf{c}_j$  per i punti intermedi  $M_j$  con  $j = 1, \dots, (N - 1)$ , determinare il vettore di variabili  $\mathbf{x}$  che minimizza la funzione obiettivo  $f(\mathbf{x})$ .*

*Il problema di minimo può essere descritto nel modo seguente.*

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \quad (4.2)$$

*tale che*

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \kappa_{max}(\mathbf{x}) + \lambda_2 \dot{\kappa}_{max}(\mathbf{x}) + \lambda_3 s_{tot}(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

$$\kappa_{max}(\mathbf{x}) \leq \kappa_M, \quad (4.4)$$

$$\dot{\kappa}_{max}(\mathbf{x}) \leq \dot{\kappa}_M, \quad (4.5)$$

$$\ddot{\kappa}_{max}(\mathbf{x}) \leq \ddot{\kappa}_M \quad e \quad (4.6)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{O} = \emptyset. \quad (4.7)$$

*Definendo il vettore delle condizioni di interpolazione come*

$$\mathbf{c}_j = [x_{M_j} \ y_{M_j} \ \theta_{M_j} \ \kappa_{M_j} \ \dot{\kappa}_{M_j} \ \ddot{\kappa}_{M_j}]^T,$$

*il vettore delle variabili del problema è composto da*

$$\mathbf{x} = \left[ \ddot{\kappa}_I \ \ddot{\kappa}_F \ \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_j \dots \mathbf{c}_N \ \eta_1^{(1)} \ \eta_2^{(1)} \dots \eta_1^{(i)} \ \eta_2^{(i)} \dots \eta_1^{(N-1)} \ \eta_2^{(N-1)} \right]^T$$

*con  $i = 1, \dots, (N - 1)$  e  $j = 1, \dots, N$ .*

*I vettori  $\mathbf{lb}$  e  $\mathbf{ub}$  rappresentano i vincoli di ricerca del minimo rispettivamente inferiori (“lower bound”) e superiori (“upper bound”).*

Nel Paragrafo 4.1.1 è illustrato il significato della funzione  $f(\mathbf{x})$  mentre nella Sezione 4.4 è esposto il significato del vettore delle variabili  $\mathbf{x}$ .

### 4.1.1 Funzione di ottimizzazione

Per risolvere il Problema 4.1 si è reso necessario l'utilizzo di un multi-ottimizzatore indispensabile quando il vettore delle variabili del problema ( $\mathbf{x}$ ) ha dimensione maggiore di 1.

La funzione obiettivo  $f$  è stata impostata come sommatoria dei contributi da minimizzare:

$$f = \lambda_0 \kappa_{max}(\mathbf{x}) + \lambda_1 \dot{\kappa}_{max}(\mathbf{x}) + \lambda_2 s_{tot}(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

Nell'equazione (4.8) sono presenti diversi contributi alla funzione obiettivo del problema di minimo. Di seguito, in dettaglio, è esposto il significato dei termini:

- $N$  numero di  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline* connesse con continuità geometrica del quarto ordine ( $G^4$ );
- $\lambda_j$  con  $j = 0, 1, 2$  pesi dei contributi. Deve valere che  $\sum_{j=0}^2 \lambda_j = 1$ ;
- $\kappa_{max}(\mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, N} \kappa_{max}^{(i)}(\mathbf{x})$  è il massimo valore che assume la curvatura della  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline* del rimorchio negli  $N$  tratti;
- $\dot{\kappa}_{max}(\mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, N} \dot{\kappa}_{max}^{(i)}(\mathbf{x})$  è il massimo valore che assume la derivata di curvatura della  $\boldsymbol{\eta}^4$ -*spline* del rimorchio negli  $N$  tratti;
- $s_{tot}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N s^{(i)}(\mathbf{x})$  con  $s^{(i)}(\mathbf{x})$  che rappresenta la lunghezza dell'*i*-esimo percorso.

Nei prossimi paragrafi verrà illustrata la metodologia di calcolo dei parametri che compongono la funzione obiettivo.

## 4.2 Obstacle Avoidance

Come già anticipato in Sezione 3.1 l'ambiente di lavoro del sistema è composto da una serie di ostacoli che vincolano le possibilità di cammino del veicolo con rimorchio. Gli ostacoli che possono presentarsi in un ambiente realistico

sono di forme complesse. Ovviamente non si può pensare di catalogare tutta la complessità degli ostacoli, bisogna, sia per ragioni di calcolo computazionale sia per ragioni pratiche, trovare dei modelli semplificati ma nello stesso tempo generali per riuscire a risolvere il problema in modo efficiente.

Si è quindi pensato all'utilizzo di poligoni convessi per la rappresentazione matematica degli ostacoli. Questi strumenti consentono di svolgere la funzione di *obstacle avoidance* in modo molto efficiente.

Bisogna tenere conto della possibilità che il percorso in corso di pianificazione porti il veicolo con rimorchio a contatto con uno degli ostacoli presenti nell'ambiente. Si è scelto di introdurre nella funzione obiettivo del Problema 4.1 alcune funzioni di penalità per discriminare le soluzioni che presentano comportamenti del veicolo non adeguati.

La penalità di collisione introdotta nel calcolo della funzione da ottimizzare viene determinata mediante il calcolo delle aree di collisione tra il modello del veicolo con rimorchio e gli ostacoli.

Per fare ciò si è dovuto modellare il veicolo con rimorchio mediante due *bounding box*, uno per la motrice e l'altro per il rimorchio, in modo da racchiuderne la fattezza. Per semplicità il veicolo e il rimorchio sono stati modellati mediante due rettangoli, come già mostrato in Figura 3.2.

La funzione di *obstacle avoidance*, quindi, determina la quantità di area di collisione tra il modello del veicolo con rimorchio e gli ostacoli presenti nell'ambiente di lavoro. Se l'area di collisione risulta maggiore di 0 allora viene associata una penalità molto alta al percorso in modo da permettere all'ottimizzatore di scartare la soluzione. La situazione è descritta nella Figura 4.1 dove il modello utilizzato per il veicolo con rimorchio transita sopra l'ostacolo. Questa situazione anomala si verifica quando le condizioni imposte di interpolazione sono inverosimili per le dimensioni del veicolo o per i vincoli imposti sullo stesso.

La formulazione matematica di questa funzione risulta essere:

$$\text{penalità} = \begin{cases} C_0 \text{ area} & \text{se } \text{area} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.9)$$

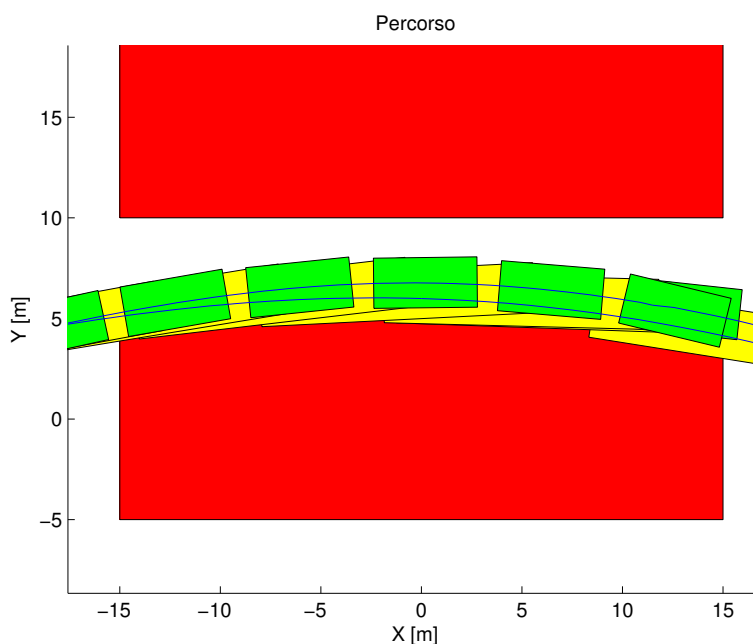


Figura 4.1: Collisione con un ostacolo

dove  $C_0$  è il coefficiente angolare della semiretta uscente dall'origine ed assume un valore grande per approssimare questa funzione alla funzione discontinua in 0 (comportamento ideale). Per comprendere meglio come è stata implementata la funzione di *obstacle avoidance*, il Paragrafo 4.2.1 ne illustra, ad alto livello, l'implementazione.

Se il percorso che si cerca di pianificare è realistico per i vincoli e le dimensioni del veicolo con rimorchio, allora l'ottimizzatore cercherà di trovare una soluzione tale da non superare i vincoli prescritti e non collidere con neanche un ostacolo lungo tutto il percorso. Dato che l'ottimizzatore deve minimizzare anche la lunghezza del cammino percorso, la situazione più frequente sarà che il percorso ottimizzato permetterà al veicolo di non collidere con gli ostacoli ma tale percorso rasenterà gli ostacoli. La soluzione è corretta nell'ottica della minimizzazione della lunghezza totale del percorso ma, all'atto pratico, pianificare un percorso adiacente agli ostacoli potrebbe portare ad una collisione in fase di attuazione dei comandi al veicolo. Un esempio di

tale situazione è riportato in Figura 4.2. Per questa problematica si potreb-

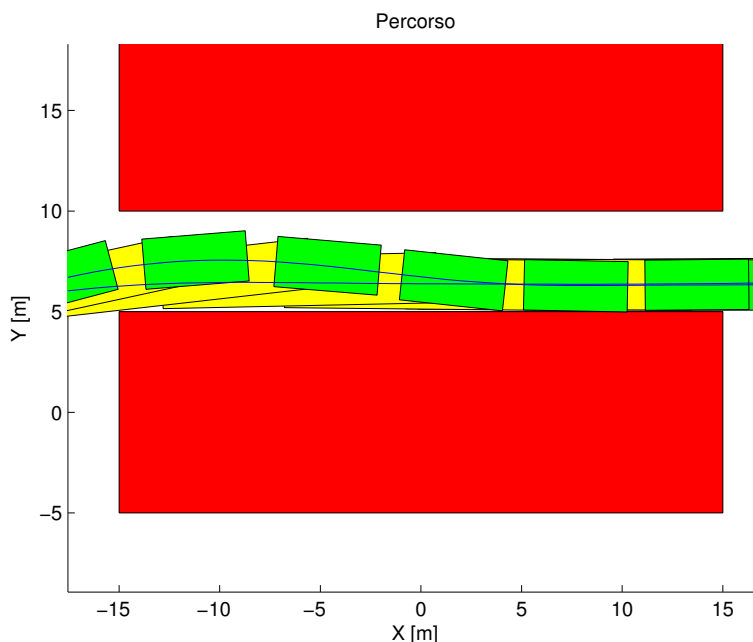


Figura 4.2: Risultato della pianificazione integrando l'obstacle avoidance

be utilizzare un *bounding box* per gli ostacoli e per il veicolo che tenga conto anche degli errori introdotti dal sistema reale e non modellati in simulazione. La funzione di penalità legata alla presenza di collisioni ha un andamento simile alle funzioni di penalità per i vincoli di curvatura e derivata di curvatura ed è proporzionale all'area di collisione calcolata mediante l'algoritmo di *obstacle avoidance*. L'andamento è esposto in Sezione 4.3.

### 4.2.1 Algoritmo

Per implementare la funzione di *obstacle avoidance* bisogna estrarre dai percorsi del veicolo e del rimorchio l'insieme dei punti che li compongono. Avendo la rappresentazione geometrica dell'insieme degli ostacoli, ottenuta da composizione di poligoni convessi, l'algoritmo possiede tutte le informazioni necessarie per procedere al calcolo dell'area di collisione. Lo pseudo-codice della funzione è esposto nell'Algoritmo 4.1. Per ogni punto  $(x_i, y_i)$  del percor-

---

**Algoritmo 4.1** Calcolo dell'area di collisione massima tra il veicolo con rimorchio e gli ostacoli

---

**Input:**  $(x_i, y_i) \in \Gamma$ ,  $(x_{0i}, y_{0i}) \in \Gamma_0$ ,  $b_k \in \mathcal{B}$

**Output:** *area*

```

area  $\leftarrow$  0
for all  $i : (x_i, y_i) \in \Gamma$  and  $(x_{0i}, y_{0i}) \in \Gamma_0$  do
   $bb_v(i) \leftarrow \text{coord}(x_{0i}, y_{0i})$ 
   $bb_r(i) \leftarrow \text{coord}(x_i, y_i)$ 
  for all  $k : b_k \in \mathcal{B}$  do
     $area_v \leftarrow \text{intersez}(bb_v(i), b_k)$ 
     $area_r \leftarrow \text{intersez}(bb_r(i), b_k)$ 
     $area_t \leftarrow area_t + area_v + area_r$ 
  end for
  if  $area < area_t$  then
     $area \leftarrow area_t$ 
  end if
end for

```

---

so del rimorchio e per ogni punto  $(x_{0i}, y_{0i})$  del percorso del veicolo vengono calcolate le coordinate del veicolo con rimorchio dalla funzione *coord*. Avendo le coordinate che rappresentano, lungo il percorso, i *bounding box* del veicolo e del rimorchio, si possono calcolare le intersezioni dei *bounding box* con gli ostacoli presenti nell'ambiente. Questa operazione, svolta dalla funzione *intersez* nello pseudo-codice, risulta un'operazione molto semplice sfruttando la convessità degli oggetti coinvolti. L'intersezione produce un valore positivo se il veicolo è in collisione con un ostacolo altrimenti assume il valore 0; nell'algoritmo tali valori sono indicati dalle variabili  $area_v$  e  $area_r$ . A questo punto si tiene traccia solo del massimo dell'area di collisione tra veicolo e ostacoli in ogni punto dei due percorsi. Ovviamente, come già illustrato in precedenza, un percorso avente un'area di collisione con gli ostacoli maggiore di 0 sarà penalizzato nella scelta del valore ottimo da parte dell'ottimizzato-

re.

Questo algoritmo ha, però, una complessità non polinomiale perchè al crescere del numero di ostacoli presenti nella scena e del numero di punti che rappresentano il percorso, la quantità di operazioni richieste per portarlo a termine aumenta in modo esponenziale. Per migliorarne l'efficienza si è scelto di discretizzare le curve che rappresentano il percorso in un numero limitato di punti. La scelta fatta non inficia la validità del metodo a patto di utilizzare un passo di discretizzazione sufficientemente fine.

Alla luce dell'algoritmo presentato la condizione insiemistica presente nell'equazione (4.7) è equivalente ad un'equazione algebrica calcolando l'area di collisione massima (*maximal collision area* - mca).

$$\text{mca} \doteq \max_{i=1,\dots,N} \text{mca}_i$$

dove

$$\text{mca}_i \doteq \max_{u \in [0,1]} \left\{ \text{area} (\mathcal{A}(\mathbf{q}) \cap \mathcal{O}) : \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x,i}(u) \\ p_{y,i}(u) \end{bmatrix} + d_1 e^{j q_4}, \right. \\ \left. q_3 = \arg (\dot{p}_{0x,i}(u) + j \dot{p}_{0y,i}(u)), q_4 = \arg (\dot{p}_{x,i}(u) + j \dot{p}_{y,i}(u)) \right\}.$$

Con questa definizione, la condizione espressa in equazione 4.7 è equivalente alla condizione algebrica

$$\text{mca}(\mathbf{x}) = 0 \tag{4.10}$$

ed il Problema 4.1 diventa un problema di minimizzazione vincolata con funzioni di penalità puramente algebriche di disuguaglianza e di uguaglianza.

### 4.3 Funzioni di penalità

Nella funzione obiettivo del problema di minimo (si veda l'equazione (4.8)) non sono presenti le funzioni di penalità causate dalla violazione dei vincoli non cinematici.

Dal punto di vista teorico, una funzione di penalità dovrebbe incrementare il valore della funzione obiettivo di un valore molto grande dovuto proprio

al fatto che se il percorso generato incappa in una penalità, tale soluzione dovrebbe essere immediatamente scartata dall'ottimizzatore. All'atto pratico, molti ottimizzatori non lineari e multivariati non risolvono problemi di minimo con funzione obiettivo discontinua.

Per ovviare al problema si sono implementate le funzioni di penalità come delle rette con pendenza molto elevata in corrispondenza del superamento del vincolo.

In Figura 4.3 è riportato un esempio di funzione di penalità per il caso della curvatura, le funzioni di penalità per gli altri parametri hanno profili analoghi. Al superamento del vincolo, indicato con  $\kappa_{max}$  in Figura 4.3, il contribu-

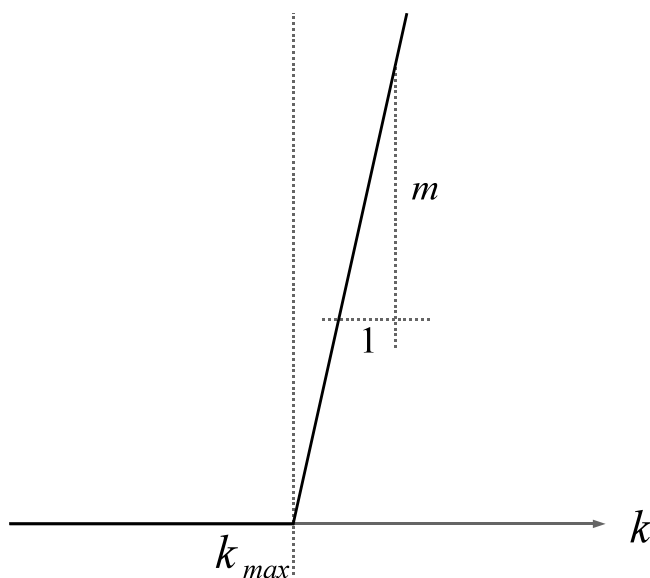


Figura 4.3: Funzione di penalità per la curvatura del percorso del rimorchio

to alla funzione obiettivo cresce in modo lineare con pendenza elevata (con  $m \gg 1$ ). Si riesce in questo modo ad avere l'effetto desiderato sulla funzione obiettivo, ossia un incremento netto della stessa alla minima variazione della curvatura e, allo stesso tempo, non essendo una funzione a gradino, l'ottimizzatore si comporta in modo adeguato scartando la soluzione che presenta un superamento dei vincoli.

Le funzioni di penalità sono inserite nella funzione di costo del problema di minimo in modo lineare. La funzione obiettivo presentata in equazione (4.8) risulterà modificata nel seguente modo:

$$f = \lambda_0 \kappa_{max}(\mathbf{x}) + \lambda_1 \dot{\kappa}_{max}(\mathbf{x}) + \lambda_2 s_{tot}(\mathbf{x}) + \text{penalità.} \quad (4.11)$$

Nella variabile *penalità* contribuiscono tutte le funzioni descritte in precedenza ossia le penalità riguardanti il superamento del vincolo di curvatura massima, di derivata di curvatura massima e di collisione con ostacoli.

La funzione descritta nell'equazione (4.11) è continua ma non è differenziabile, nonostante ciò l'algoritmo di ottimizzazione riesce a determinare il minimo del problema.

## 4.4 Parametri liberi

Dalla definizione del problema di minimo presentato nel Problema 4.1 rimane da chiarire il significato del vettore  $\mathbf{x}$ . Questo vettore rappresenta i gradi di libertà dell'ottimizzatore e quindi ne definisce i parametri liberi o le variabili di decisione del problema. L'ottimizzatore può scegliere il minimo della funzione  $f$  nel dominio definito dalla condizione espressa nelle disequazioni (4.2) cioè

$$\mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub}.$$

Il Problema 4.1 risulta così essere definito come *problema di minimo con funzione obiettivo multivariabile, non lineare e vincolata*.

I parametri presenti nel vettore  $\mathbf{x}$  sono quindi le uniche variabili su cui l'ottimizzatore può spaziare per determinare il minimo della funzione. La scelta dei parametri è stata fatta per riuscire a determinare punti di interpolazione intermedi tra il punto di partenza e l'arrivo indicati rispettivamente dallo stato esteso

$$\mathcal{I} = \left[ x_{0I} \ y_{0I} \ \theta_{0I} \ \theta_{1I} \ v_I \ \dot{v}_I \ \delta_I \ \dot{\delta}_I \right]^T$$

e

$$\mathcal{F} = \left[ x_{0F} \ y_{0F} \ \theta_{0F} \ \theta_{1F} \ v_F \ \dot{v}_F \ \delta_F \ \dot{\delta}_F \right]^T.$$

I punti di interpolazione intermedi sono necessari per vincolare il veicolo con rimorchio a seguire una determinata direzione di marcia. Senza di essi, avendo introdotto nella funzione di costo il peso riguardante la lunghezza del percorso, il veicolo con rimorchio tenderebbe sempre a percorrere il cammino più breve che, in alcuni casi, non è la soluzione cercata. I vari punti intermedi sono indicati con lo stato esteso  $\mathcal{M}_i$  con  $i = 1, \dots, (N - 1)$  se i percorsi da ottimizzare sono  $N$ .

Dato che l'obiettivo del Problema 4.1 è di minimizzare la curvatura e la derivata di curvatura massima del cammino percorso dal rimorchio, definire i punti di interpolazione intermedi come costanti produrrebbe un effetto negativo sul punto ottimo trovato dall'ottimizzatore. Si è dunque scelto di introdurre nel vettore delle variabili ( $\mathbf{x}$ ) del problema di minimo l'insieme dei parametri che definiscono i punti intermedi.

Oltre a questi parametri si è scelto di ottimizzare anche  $\ddot{\kappa}_I$  e  $\ddot{\kappa}_F$  ossia la derivata seconda di curvatura del punto iniziale e finale del percorso. In aggiunta si ottimizzano anche i valori dei parametri  $\eta_1$  ed  $\eta_2$  nei vari tratti.

In sintesi l'ottimizzatore sceglie il punto ottimo avendo un vettore di variabili così formato:

- $\ddot{\kappa}_I, \ddot{\kappa}_F$  che identificano la derivata seconda di curvatura iniziale e finale;
- $\mathbf{c}_j = [ x_{M_j} \ y_{M_j} \ \theta_{M_j} \ \kappa_{M_j} \ \dot{\kappa}_{M_j} \ \ddot{\kappa}_{M_j} ]$  con  $j = 1, \dots, (N - 1)$  che identificano i parametri di interpolazione dei punti intermedi necessari per generare una serie di percorsi di classe  $G^4$  da congiungere;
- $\eta_1^{(i)}$  e  $\eta_2^{(i)}$  con  $i = 1, \dots, N$  che identificano i valori delle variabili  $\boldsymbol{\eta}$  negli  $N$  percorsi di classe  $G^4$ .

I parametri dei punti di interpolazione intermedia sono ovviamente riferiti al punto posteriore del rimorchio perchè la determinazione delle  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline avviene pianificando la traiettoria nel punto intermedio dell'asse ruota del rimorchio, indicato in Figura 1.2 con le coordinate  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ .

Come già introdotto in precedenza, il problema è vincolato da *upper bound* e *lower bound* sulle variabili. Questi vincoli lineari e definiscono un dominio

chiuso e limitato per ogni variabile. I vincoli sulle curvature, derivate e derivate seconde di curvatura sono stati definiti nella Sezione 3.5 secondo i vincoli fisici e cinematici del veicolo con rimorchio considerato. Per quanto riguarda le posizioni dei punti intermedi  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$  si è scelto un intorno rettangolare del punto desiderato di interpolazione. Anche per le orientazioni del rimorchio nei punti di interpolazione intermedi  $\theta_i$  si è scelto un intorno conico dell'orientazione desiderata per quel punto intermedio. I parametri  $\eta_1^{(i)}$  ed  $\eta_2^{(i)}$  sono scelti in un intorno rettangolare della distanza cartesiana tra gli estremi del percorso da pianificare.

Tutti gli algoritmi di minimizzazione necessitano di un'inizializzazione delle variabili, per questo sono stati scelti valori iniziali conformi ad i *vincoli box* presenti sulle variabili.

Essendo il problema di ottimizzazione non lineare, non si è neanche certi che la soluzione trovata sia l'ottimo globale del problema. Infatti gli algoritmi che risolvono i problemi di ottimizzazione non lineare possono trovare minimi locali e non globali della funzione di costo. Per limitare questo problema, la scelta del vettore  $\mathbf{x}_0$  di inizializzazione deve essere oculata e già in un intorno della soluzione ottima. Questo non vincola in alcun modo la scelta dei punti intermedi perchè l'inizializzazione dei parametri è fatta nel punto mediano dell'intorno descritto dai *vincoli box* su ogni variabile del problema. A seconda della situazione presente nell'ambiente, l'intorno delle variabili può essere variato per vincolare l'ottimizzatore a trovare una soluzione non distante dal punto iniziale desiderato.

# Capitolo 5

## Controllo del sistema

*In questo capitolo si tratta della metodologia scelta per il controllo del sistema sfruttando il risultato della “flat-ness”.*

Qualsiasi sistema fisico modellato sotto forma di equazioni cinematiche presenta dei comportamenti, in casi straordinari, che non rientrano nel modello utilizzato. Oltretutto, i sensori utilizzati per determinare lo stato corrente del sistema hanno inevitabilmente qualche problema di caratterizzazione ossia le misure ottenute da essi non sono esattamente corrette ma sono corrette con una tolleranza che può variare a seconda della qualità del sensore stesso. In questo contesto la sola pianificazione non è in grado di risolvere la sfida della guida automatica. È pertanto necessario introdurre una strategia di controllo per correggere eventuali comportamenti del sistema fisico che risultano diversi dall'evoluzione pianificata.

### 5.1 I sistemi “flat”

La legge di controllo applicata al modello cinematico del veicolo con rimorchio sfrutta la proprietà che possiede il punto  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$  di essere un *flat output* per il sistema.

**Definizione 5.1.** *Un sistema dinamico con  $m$  ingressi è definito formalmente “differentially flat” o, per brevità, flat se e solo se esiste un flat output*

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$$

*tale che il sistema è lineare sul campo differenziale generato dal vettore  $\mathbf{y}$ .*

Questa definizione può essere interpretata per il caso di un sistema in forma esplicita come quello del veicolo con rimorchio.

**Definizione 5.2.** *Il sistema in forma esplicita  $\dot{x} = f(x, u)$  con  $m$  ingressi è flat se e solo se esiste un flat output  $y$  di dimensione  $m$ , due interi  $r$  e  $s$ , una mappa  $\psi : X \times (\mathbb{R}^m)^{s+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  di rango  $m$  in un opportuno insieme aperto e  $(\varphi_0, \varphi_1) : \mathbb{R}^{(m+2)r} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  di rango  $n+m$  in un opportuno insieme aperto tali che*

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = \psi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(s)})$$

*implica che*

$$x = \varphi_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}), \quad u = \varphi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)}),$$

*l’equazione differenziale*

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = f(\varphi_0, \varphi_1)$$

*è identicamente soddisfatta.*

In modo informale si può asserire che un sistema è definito flat se si possono definire sia lo stato del sistema sia gli ingressi in funzione del flat output e di un numero finito di derivate dello stesso.

Una proposizione molto pratica, la cui dimostrazione è esposta in [5] riguarda la dimensione del flat output.

**Proposizione 5.1.** *Dato un sistema flat, il numero di componenti del flat output è uguale al numero di ingressi indipendenti del sistema.*

Secondo la Proposizione 5.1 il sistema in esame del veicolo con rimorchio avrà un flat output composto da due componenti visto che il modello del sistema

ha due ingressi indipendenti  $\delta$  e  $v$ . Le due componenti del flat output sono  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$  ossia le coordinate cartesiane del centro dell'asse posteriore del rimorchio.

### 5.1.1 Trasformazione del modello cinematico

Inizialmente si dimostra che il punto  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$  è flat. La dimostrazione è valida nel caso generale del veicolo con  $n$  rimorchi, per semplicità notazionale si riporta la dimostrazione del caso con un singolo rimorchio. La dimostrazione formale del caso generale si può trovare in [5].

Si vuole dimostrare che il punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$  del veicolo trainante e  $\theta_0$  angolo di orientazione dello stesso sono esprimibili con un numero finito di derivate del flat output ossia con una funzione

$$f(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(i)}, y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(i)}).$$

È sufficiente mostrare che  $\theta_0$  sia esprimibile come funzione del flat output e di un numero finito di sue derivate per dire che anche l'angolo di sterzata  $\delta$  ha la stessa proprietà.

Partendo dal modello cinematico del veicolo con rimorchio si esegue una ridefinizione delle variabili chiamando  $u$  il modulo della velocità del veicolo e  $\varphi$  l'angolo di sterzata delle ruote del veicolo trainante

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u \cos \theta_0 \\ \dot{y}_0 = u \sin \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = \frac{u}{d_0} \tan \varphi \\ \dot{\theta}_1 = \frac{u}{d_1} \sin (\theta_0 - \theta_1). \end{cases} \quad (5.1)$$

Si introduce il sistema in forma implicita può essere scritto come segue

$$\begin{cases} \dot{x}_0 \sin \theta_0 - \dot{y}_0 \cos \theta_0 = 0 \\ d_1 \dot{\theta}_1 - (\dot{x}_0 \cos \theta_0 + \dot{y}_0 \sin \theta_0) \sin (\theta_0 - \theta_1) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Si può definire il modulo della velocità del punto posteriore del rimorchio mediante

$$u_1 = u \cos(\theta_0 - \theta_1)$$

e da semplici relazioni geometriche si può definire

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos \theta_1, \quad \dot{y}_1 = u_1 \sin \theta_1$$

e

$$\tan \theta_1 = \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}$$

oppure

$$\sin \theta_1 = \frac{\dot{y}_1}{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad \cos \theta_1 = \frac{\dot{x}_1}{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ora, ricordando che

$$x_0 = x_1 + d_1 \cos \theta_1,$$

$$y_0 = y_1 + d_1 \sin \theta_1$$

e

$$\tan \theta_0 = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$$

si vede immediatamente che  $x_0$  e  $y_0$  sono espressi in funzione di  $x_1$ ,  $y_1$  e delle loro derivate del primo ordine, cioè

$$x_0 = x_1 + d_1 \cos \left( \arctan \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} \right) \quad (5.3)$$

$$y_0 = y_1 + d_1 \sin \left( \arctan \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} \right). \quad (5.4)$$

Per quanto riguarda  $\theta_0$  si può mostrare che può essere espresso in funzione del flat output e le sue derivate fino al secondo ordine. Eseguendo i calcoli espliciti risulta che

$$\theta_0 = \arctan \left( \frac{\dot{x}_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2} - \dot{y}_1 [d_1 (\dot{x}_1 \ddot{y}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1)]}{\dot{y}_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2} + \dot{x}_1 [d_1 (\dot{x}_1 \ddot{y}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1)]} \right) \quad (5.5)$$

Questo conclude la dimostrazione. Il punto  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$  è flat.

Dall'analisi delle equazioni (5.3), (5.4) e (5.5) si ottiene che il numero intero

$r$  che compare nella Definizione 5.2 per il caso del veicolo con rimorchio è pari ad 1. Partendo da questo presupposto è necessario effettuare una trasformazione del modello del sistema per permettere di sfruttare la teoria introdotta. Per riuscire ad esprimere lo stato e gli ingressi del sistema in funzione della *flat output* è necessario derivare fino al secondo ordine  $v_1$  per ottenere i controlli desiderati. Bisogna quindi compensare la necessità della derivazione con l'inserimento di due nuovi stati nel sistema.

Indicando con  $v_1$  il modulo della velocità dell'asse posteriore del rimorchio, si può scrivere la relazione che la lega all'ingresso del sistema  $v$ .

$$v_1 = v \cos(\theta_0 - \theta_1)$$

Si devono introdurre anche due nuovi stati nel sistema per riuscire ad esprimerlo secondo il metodo della “*flat-ness*” introdotto precedentemente. Il modello trasformato risulterà quindi

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \frac{v_1}{\cos(\theta_0 - \theta_1)} \cos \theta_0 \\ \dot{y}_0 = \frac{v_1}{\cos(\theta_0 - \theta_1)} \sin \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = \frac{1}{d_0} \frac{v_1}{\cos(\theta_0 - \theta_1)} \tan \delta \\ \dot{\theta}_1 = \frac{v_1}{d_1} \tan(\theta_0 - \theta_1) \\ \dot{v}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u_1 \end{cases} \quad (5.6)$$

Nel modello (5.6) sono presenti due nuovi stati  $v_1$  e  $z_2$ . Questi stati ausiliari sono necessari per ottenere il controllo come soluzione di un sistema lineare, in particolare  $v_1$  coincide con la velocità del punto mediano dell'asse ruota del rimorchio e  $z_2$  coincide con  $\dot{v}_1$ .

Il sistema presenta quindi un vettore di stato di sei componenti rappresentabile da

$$\mathbf{x} = [x_0 \ y_0 \ \theta_0 \ \theta_1 \ v_1 \ \dot{v}_1]^T$$

mentre gli ingressi al sistema e quindi i controlli sono

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T = [\ddot{v}_1 \ \delta]^T$$

## 5.2 Introduzione del rumore

Dal punto di vista della simulazione gli errori presenti nel sistema reale devono essere modellati per correggere la carenza espressiva del semplice modello cinematico. Gli errori sono modellati mediante l'aggiunta del rumore.

Il termine rumore ingloba tutto quello che non è modellizzato, si sovrappone al segnale utile di pianificazione ed è necessario per avere una simulazione più verosimile del problema da risolvere.

Il rumore è spesso rappresentato da numeri casuali vista l'aleatorietà della sua provenienza e viene descritto in termini probabilistici. Per descrivere il rumore si utilizza spesso la teoria dei processi stocastici in particolare si considera la classe dei processi stocastici stazionari, tempo invarianti ed *ergotici* cioè tutte le proprietà d'insieme del processo sono estraibili da una singola osservazione. La teoria dei processi stocastici è anche molto efficace nella rappresentazione in concreto del rumore perchè è sufficiente descrivere la distribuzione di probabilità della singola osservazione per caratterizzare completamente l'evoluzione temporale dell'intero processo.

Nel caso di studio del modello cinematico del veicolo con rimorchio, si deve definire in termini probabilistici il concetto di rumore e comprendere quali parti del modello matematico sono coinvolte.

Si è scelto come distribuzione di probabilità del processo, una distribuzione normale con media nulla perchè è il modo più naturale con cui il rumore si presenta in un sistema reale. Il rumore interviene sullo stato del modello cinematico e, per semplicità di trattazione, è stato considerato come rumore additivo gaussiano. La formulazione matematica della distribuzione di probabilità si può rappresentare con la seguente formula

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove  $\mu$  rappresenta la media e  $\sigma^2$  la varianza del processo.

Nel Paragrafo 5.2.1 verrà introdotto il rumore nel modello cinematico del veicolo con rimorchio.

### 5.2.1 Modello cinematico con aggiunta del rumore

Il modello cinematico del veicolo con rimorchio introdotto in (5.6) viene modificato nel seguente modo con l'introduzione del rumore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_0 = \frac{v_1}{\cos(\theta_0 - \theta_1)} \cos \theta_0 + \varepsilon_1 \\ \dot{y}_0 = \frac{v_1}{\cos(\theta_0 - \theta_1)} \sin \theta_0 + \varepsilon_2 \\ \dot{\theta}_0 = \frac{1}{d_0} \frac{v_1}{\cos(\theta_0 - \theta_1)} \tan \delta + \varepsilon_3 \\ \dot{\theta}_1 = \frac{v_1}{d_1} \tan(\theta_0 - \theta_1) + \varepsilon_4 \\ \dot{v}_1 = z_2 + \varepsilon_5 \\ \dot{z}_2 = u_1 + \varepsilon_6. \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Come si può notare dal sistema (5.7) il rumore è stato aggiunto in modo affine per la natura additiva del rumore stesso. Questa ipotesi può essere assunta senza perdita di generalità perchè non sono presenti vincoli stringenti sull'entità del rumore presente in un sistema reale. Una modellizzazione migliore potrebbe essere fatta *ad hoc* su di un problema specifico.

Le variabili  $\varepsilon_i(t)$  con  $i = 1, \dots, 6$  sono campioni estratti dal processo stocastico rappresentato da sei funzioni di probabilità gaussiane a media nulla e varianza dipendente dal tipo di variabile di stato che si sta considerando. In particolare si è scelta una varianza maggiore per le variabili che definiscono la posizione del veicolo mentre una varianza minore per le variabili che definiscono delle posizioni angolari. La scelta si basa su una deduzione logica della meccanica di un veicolo con rimorchio: risulta più plausibile una maggiore incertezza sulla posizione rispetto ad un'incertezza sull'orientazione del veicolo.

## 5.3 Determinazione della legge di controllo

Dal sistema mostrato in equazione (5.6) si può utilizzare una legge di controllo lineare che impone la stabilità asintotica del sistema retroazionato. Questo

è possibile farlo grazie alla trasformazione del sistema introdotta sfruttando il concetto di “*flat-ness*”. Il sistema non lineare che regola il veicolo con rimorchio viene trattato come un sistema lineare ed il controllo applicato sarà lo stesso tipo di controllo che si può applicare ad un sistema lineare. Ora si è in grado di stabilire la legge di controllo che può essere rappresentata sinteticamente dalla forma

$$\ddot{e} = -K_3 \ddot{e} - K_2 \dot{e} - K_1 e \quad (5.8)$$

definendo

$$\ddot{e} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 - \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{y}_1 - \ddot{\bar{y}}_1 \end{pmatrix}, \quad \ddot{e} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 - \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{y}_1 - \ddot{\bar{y}}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 - \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{y}_1 - \dot{\bar{y}}_1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ y_1 - \bar{y}_1 \end{pmatrix}.$$

Dal percorso  $\Gamma$  pianificato mediante  $\eta^4$ -*spline* si ottengono per ogni istante di tempo i valori di  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ,  $(\dot{\bar{x}}_1, \dot{\bar{y}}_1)$ ,  $(\ddot{\bar{x}}_1, \ddot{\bar{y}}_1)$  e  $(\ddot{\bar{x}}_1, \ddot{\bar{y}}_1)$ . Il simbolo soprastegnato indica appunto che tali variabili sono il riferimento che la legge di controllo deve seguire.

Mentre i valori  $(x_1, y_1)$ ,  $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ ,  $(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1)$  e  $(\ddot{\bar{x}}_1, \ddot{\bar{y}}_1)$  ad ogni istante di tempo sono ottenuti dalla valutazione del sistema reale. In simulazione sono derivate dal modello (5.7) mediante le seguenti relazioni geometriche.

Dalla legge di controllo riportata in (5.8) si può ricavare il sistema

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{e}_x + \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{y}_1 = \ddot{e}_y + \ddot{\bar{y}}_1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Il sistema mostrato in (5.9) racchiude le leggi di controllo desiderate, la risoluzione del sistema rispetto alle variabili  $\ddot{v}_1$  e  $\delta$  permette di trovare le leggi matematiche del controllo. Risulterà un controllo non lineare data la natura non lineare del sistema ma il calcolo delle leggi risulta una banale risoluzione di un sistema di due equazioni in due variabili, dove le variabili compaiono in modo lineare nel sistema.

Per risolvere il sistema in equazione (5.9) si devono ricavare le seguenti informazioni dal modello cinematico.

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - d_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = y_0 - d_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 = v_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{v}_1 \cos \theta_1 - v_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \ddot{y}_1 = \dot{v}_1 \sin \theta_1 + v_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (5.12)$$

Le relazioni espresse in equazioni (5.10) - (5.12) sono immediatamente determinate sfruttando le informazioni presenti ad ogni istante di tempo nello stato del modello cinematico con aggiunta di rumore

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{v}_1 \cos \theta_1 - 2 \dot{v}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - v_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 - v_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 \\ \ddot{y}_1 = \ddot{v}_1 \sin \theta_1 + 2 \dot{v}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + v_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - v_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (5.13)$$

Nella relazione espressa nell'equazione (5.13) manca ancora la definizione di  $\ddot{\theta}_1$ , la sua determinazione avviene tramite derivazione esplicita rispetto al tempo dell'equazione presente nel modello cinematico (5.6) ossia

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{d_1} \left[ \dot{v}_1 \tan(\theta_0 - \theta_1) + v_1 \frac{1}{\cos^2(\theta_0 - \theta_1)} (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \right]. \quad (5.14)$$

Ora sostituendo le equazioni (5.10) - (5.14) nel sistema di equazioni (5.9) si ottengono le espressioni in forma chiusa per i controlli cercati.

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 = & \frac{v_1^3}{d_1^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_1)} - \frac{v_1^3}{d_1^2} + \ddot{x}_1 \cos \theta_1 + \ddot{y}_1 \sin \theta_1 + K_3 \ddot{x}_1 \cos \theta_1 + \\ & + K_3 \ddot{y}_1 \sin \theta_1 + K_2 \dot{x}_1 \cos \theta_1 + K_2 \dot{y}_1 \sin \theta_1 + K_1 \bar{x}_1 \cos \theta_1 + \\ & + K_1 \bar{y}_1 \sin \theta_1 - K_1 x_0 \cos \theta_1 - K_1 y_0 \sin \theta_1 + \\ & + K_1 d_1 - K_2 v_1 - K_3 \dot{v}_1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \delta = & \arctan \left( \frac{d_0}{d_1} \sin(\theta_0 - \theta_1) + \frac{d_0 d_1 \cos^3(\theta_0 - \theta_1)}{v_1^3} (-\ddot{x}_1 \sin \theta_1 + \right. \\ & \ddot{y}_1 \cos \theta_1 - K_3 \ddot{x}_1 \sin \theta_1 + K_3 \ddot{y}_1 \cos \theta_1 - K_2 \dot{x}_1 \sin \theta_1 + K_2 \dot{y}_1 \cos \theta_1 - \\ & - K_1 \bar{x}_1 \sin \theta_1 + K_1 \bar{y}_1 \cos \theta_1 + K_1 x_0 \sin \theta_1 - K_1 y_0 \cos \theta_1) - \\ & \left. - \frac{d_0 \sin(\theta_0 - \theta_1) \cos^2(\theta_0 - \theta_1)}{v_1^2 d_1} (K_3 d_1 v_1 + 3 \dot{v}_1) \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dall'equazione (5.16) si nota che il controllo  $v_1(t)$  non può essere nullo per evitare la singolarità della funzione. L'equazione (5.15) non presenta alcuna singolarità in quanto la funzione a denominatore non può essere mai nulla per definizione del problema di interpolazione polinomiale di classe  $G^4$  (Problema 2.1).

Ora manca la determinazione dei coefficienti  $K_i$  con  $i = 1, 2, 3$ .

### 5.3.1 Progettazione del controllore

Nelle espressioni in forma chiusa dei controlli mostrate in (5.15) e (5.16) rimane da determinare il valore dei coefficienti  $K_i$  con  $i = 1, 2, 3$ . Data la legge di controllo lineare (5.8) è sufficiente progettare un regolatore tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente globalmente stabile. Data la linearità della legge di controllo è sufficiente progettare i parametri  $K_i$  in modo da ottenere i poli del sistema retroazionato a parte reale negativa sfruttando la teoria dei sistemi lineari.

Si passa quindi alla trasformata di Laplace della legge di controllo trovando

$$s^3 + K_3 s^2 + K_2 s + K_1 = 0. \quad (5.17)$$

A questo punto si determinano i valori di  $K_i$  tali per cui il sistema retroazionato è stabile imponendo che il sistema controllato desiderato abbia tutti i poli a parte reale negativa. Si è scelto come sistema controllato desiderato il sistema con funzione di trasferimento pari a

$$(s + 5)(s + 4)(s + 3) = 0. \quad (5.18)$$

Il risultato del sistema di condizioni lineari determina in modo univoco il valore dei coefficienti del controllo:

$$K_1 = 60 \quad (5.19)$$

$$K_2 = 47 \quad (5.20)$$

$$K_3 = 12. \quad (5.21)$$

# Capitolo 6

## Simulazione

*In questo capitolo si mostrano i risultati di varie simulazioni del veicolo con rimorchio in ambiente con ostacoli. Si dà una descrizione preliminare dell'ambiente e successivamente si riportano i risultati della simulazione*

Data l'impossibilità di disporre di un veicolo con rimorchio reale, le prove di correttezza della teoria mostrata nei capitoli precedenti sono state sviluppate mediante una simulazione del veicolo con rimorchio in un ambiente virtuale con l'ausilio di **MATLAB**<sup>®</sup> versione 2009b <sup>1</sup>.

Per illustrare i risultati ottenuti dalla simulazione è necessario dare una preliminare descrizione dell'ambiente e del veicolo simulato.

### 6.1 Descrizione dell'ambiente

L'ambiente di simulazione è composto da ostacoli rappresentati da combinazioni di rettangoli per semplicità di rappresentazione. Il veicolo con rimorchio è vincolato a muoversi sulla collezione di percorsi di classe  $G^4$  calcolati mediante le  $\eta^4$ -spline. Il veicolo con rimorchio è rappresentato da due rettangoli che ne racchiudono le fattezze.

Per simulare una situazione verosimile si è dovuto dimensionare il sistema.

---

<sup>1</sup>Maggiori informazioni sul prodotto: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

Nei paragrafi seguenti sono illustrate le scelte fatte per dimensionare il veicolo con rimorchio e quindi i relativi vincoli massimi sulla curvatura e derivata di curvatura di ogni tratto del percorso.

### 6.1.1 Dimensioni veicolo con rimorchio

Per il modello del veicolo con rimorchio, si sono scelte le dimensioni massime per un rimorchio a singolo asse ammissibili dal codice della strada italiano. Per quanto riguarda la motrice si è cercato sono prese le dimensioni di un modello reale. In Tabella 6.1 sono riportate le dimensioni scelte per le variabili interessanti del modello cinematico.

Entità	Lunghezza [m]
Lunghezza totale motrice	5.15
Larghezza totale motrice	2.5
Sbalzo posteriore motrice	0.8
Distanza interasse motrice ( $d_1$ )	3.5
Lunghezza totale rimorchio	13.2
Larghezza totale rimorchio	2.5
Sbalzo posteriore rimorchio	1.2
Distanza asse-ralla rimorchio ( $d_0$ )	11.5

Tabella 6.1: Caratteristiche tecniche del veicolo con rimorchio simulato.

### 6.1.2 Vincoli

Dopo aver definito le dimensioni del veicolo con rimorchio, si possono definire i vincoli massimi che il veicolo con rimorchio deve rispettare nei vari percorsi di classe  $G^4$ . Seguendo la trattazione teorica dei vincoli espressa in Sezione 3.5 si riescono a definire tutti i vincoli necessari per esprimere il problema di ottimizzazione presentato in Sezione 4.1.

Dai dati reali che descrivono la motrice si deduce che il raggio minimo di sterzata è

$$R_{min} = 11.5 \text{ m},$$

quindi il vincolo che esprime la massima curvatura del veicolo risulta essere

$$\kappa_{max} = 0.087 \frac{\text{rad}}{\text{m}}.$$

A questo punto si è in grado di definire il vincolo di sterzata massima del veicolo trainante. Dalla formula (3.23) risulta

$$\delta_{max} = 0,2954 \text{ rad}.$$

Per quanto riguarda la velocità della sterzata si è scelto in modo euristico di limitarla a  $30^\circ$  ogni  $15 \text{ cm}$ . Per questo si ottiene

$$\dot{\delta}_{max} = 3.4907 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ora si può definire il vincolo di derivata massima di curvatura.

$$\dot{\kappa}_{max} = 1.3298 \frac{\text{rad}}{\text{ms}}.$$

Per quanto riguarda il vincolo di massima derivata seconda di curvatura si è scelto in modo euristico di limitarla a  $0.1 \frac{\text{rad}}{\text{ms}^2}$ .

I vincoli presenti sul percorso che percorre il rimorchio sono i seguenti:

Vincolo	Valore [ <i>u.d.m</i> ]
$\delta_{1max}$	1.4835 [ <i>rad</i> ]
$\kappa_{1max}$	0.99 [ $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ]
$\dot{\delta}_{1max}$	1.1636 [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]
$\dot{\kappa}_{1max}$	0.1043 [ $\frac{\text{rad}}{\text{ms}}$ ]
$\ddot{\kappa}_{1max}$	0.1 [ $\frac{\text{rad}}{\text{ms}^2}$ ]

Tabella 6.2: Vincoli riguardanti il percorso del rimorchio.

## 6.2 Scenario *Labirinto*

Lo scenario denominato *Labirinto* rappresenta un insieme di ostacoli (in Figura 6.1) disposti in modo da obbligare il veicolo con rimorchio a percorrere un'inversione di marcia in uno spazio ristretto in confronto alle sue dimensioni. L'obiettivo di questo scenario è connettere con tre tratti di  $\eta^4$ -spline lo stato esteso iniziale  $\mathcal{A}$  con lo stato esteso finale  $\mathcal{B}$ , dove

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [20 \quad 10 \quad \pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathcal{B} &= [50 \quad -30 \quad -\pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.\end{aligned}$$

I due punti intermedi sono scelti nell'intorno delle condizioni di interpolazione

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= [40 \quad 80 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{c}_2 &= [85 \quad 50 \quad -\pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.\end{aligned}$$

Dopo aver eseguito la funzione ottimizzatore, i parametri che minimizzano il Problema 4.1 risultano avere i seguenti valori.

$\ddot{\kappa}_A$	$\ddot{\kappa}_B$	$\eta_1^{(1)}$	$\eta_2^{(1)}$	$\eta_1^{(2)}$	$\eta_2^{(2)}$	$\eta_1^{(3)}$	$\eta_2^{(3)}$
0.0015	0.0011	83.910	83.921	54.086	54.088	76.924	76.923

$x_{M1}$	$y_{M1}$	$\theta_{M1}$	$\kappa_{M1}$	$\dot{\kappa}_{M1}$	$\ddot{\kappa}_{M1}$
40.022	79.977	0.3755	-0.0352	$8.53 \times 10^{-4}$	$9.96 \times 10^{-4}$

$x_{M2}$	$y_{M2}$	$\theta_{M2}$	$\kappa_{M2}$	$\dot{\kappa}_{M2}$	$\ddot{\kappa}_{M2}$
84.951	50.001	-1.5447	-0.0293	$-7.78 \times 10^{-4}$	$-3.19 \times 10^{-4}$

Si nota come l'ottimizzatore modifica i parametri delle condizioni di interpolazione intermedie con l'obiettivo di diminuire la curvatura e derivata di curvatura massima di tutti i tratti e anche cercando di percorrere il cammino più breve senza violare alcun vincolo.

In Figura 6.2 e 6.3 sono riportati i grafici relativi alla curvatura e derivata di curvatura del percorso del rimorchio e del veicolo rispetto all'ascissa curvilinea. Si nota come tutte le grandezze rispettano i rispettivi vincoli e

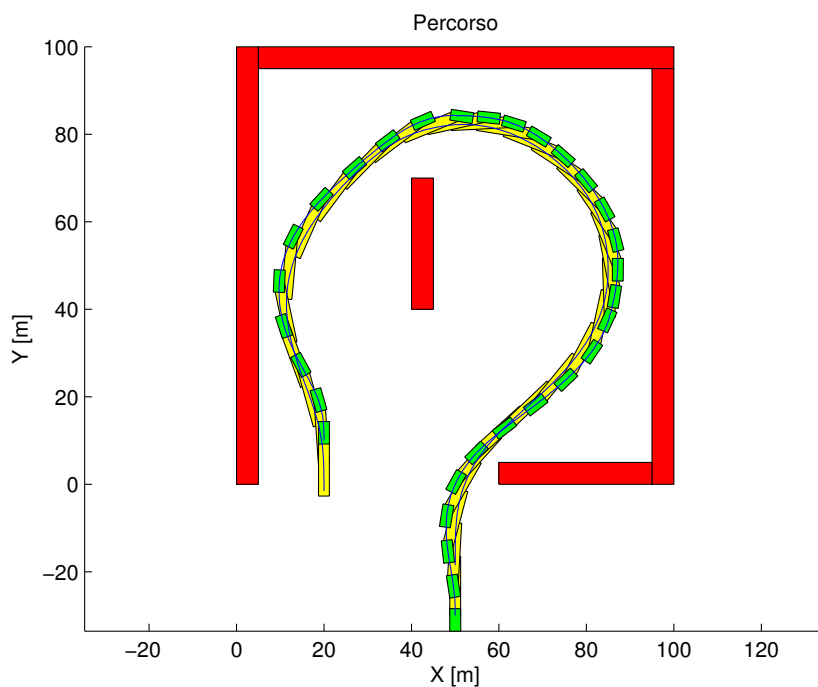


Figura 6.1: *Labirinto* - Percorso del veicolo con rimorchio

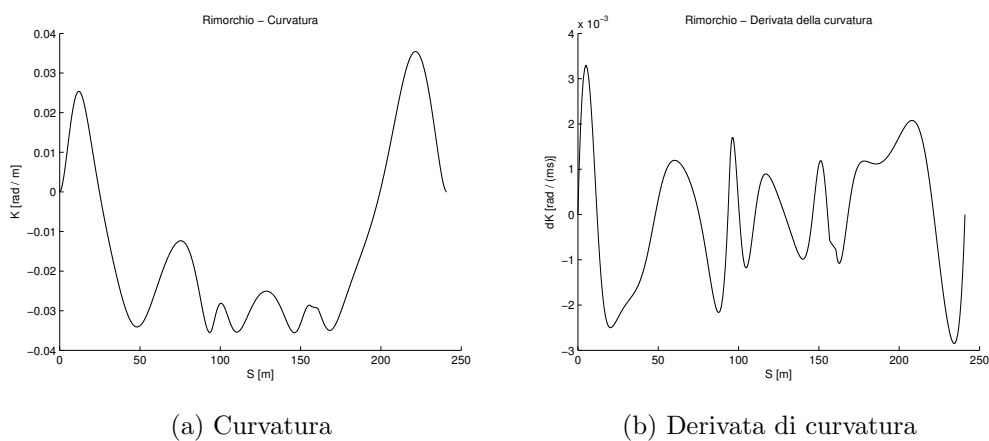


Figura 6.2: *Labirinto* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del rimorchio

mantengano il grado di continuità necessario per permettere un controllo  $\delta$  di classe  $C^1$  come mostrato in Figura 6.4.

Il controllo è espresso in funzione dell'ascissa curvilinea perchè si può pia-

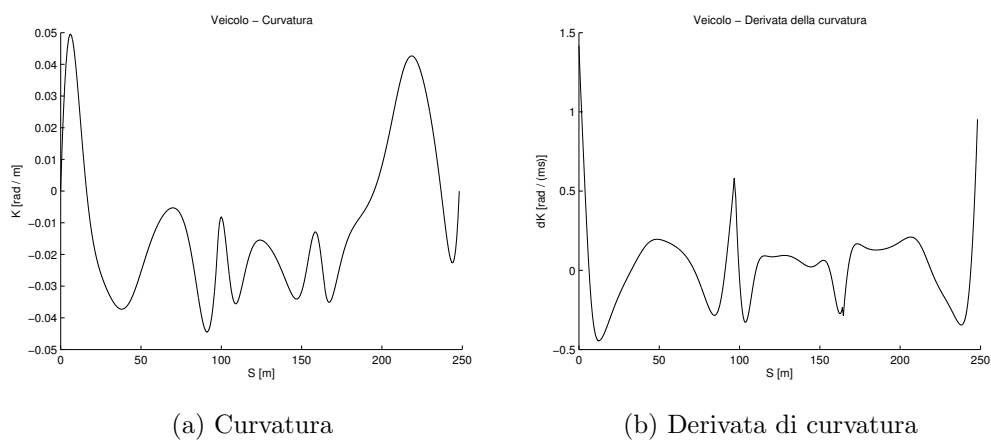


Figura 6.3: *Labirinto* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del veicolo trainante

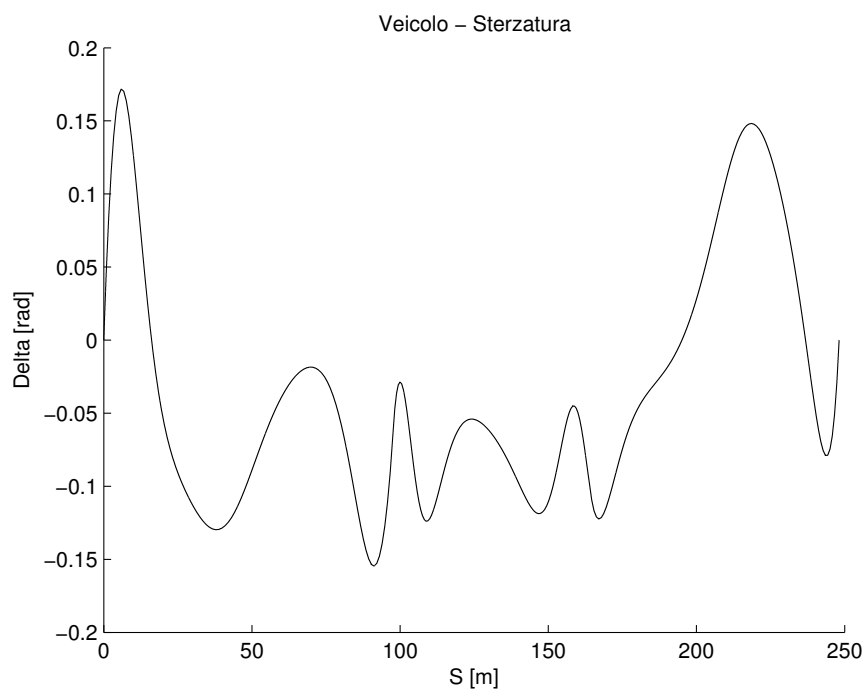


Figura 6.4: *Labirinto* - Controllo  $\delta(s)$

nificare la velocità con un segnale di classe  $C^1$  qualsiasi senza modificare il segnale  $\delta$  grazie alla decomposizione velocità-percorso (si veda a riguardo [1] in Bibliografia).

## 6.3 Scenario *Parcheggio parallelo*

Un problema molto sentito nella pianificazione del moto di veicoli automatici è sicuramente la ricerca dell'insieme di manovre necessarie per effettuare un parcheggio. In particolare, questa in questa sezione si mostra una possibile soluzione al problema del parcheggio parallelo. La casistica di situazioni è molto varia, si riporta un esempio di parcheggio effettuato in due manovre con prima manovra in avanti e seconda all'indietro.

### 6.3.1 Una manovra - indietro/avanti

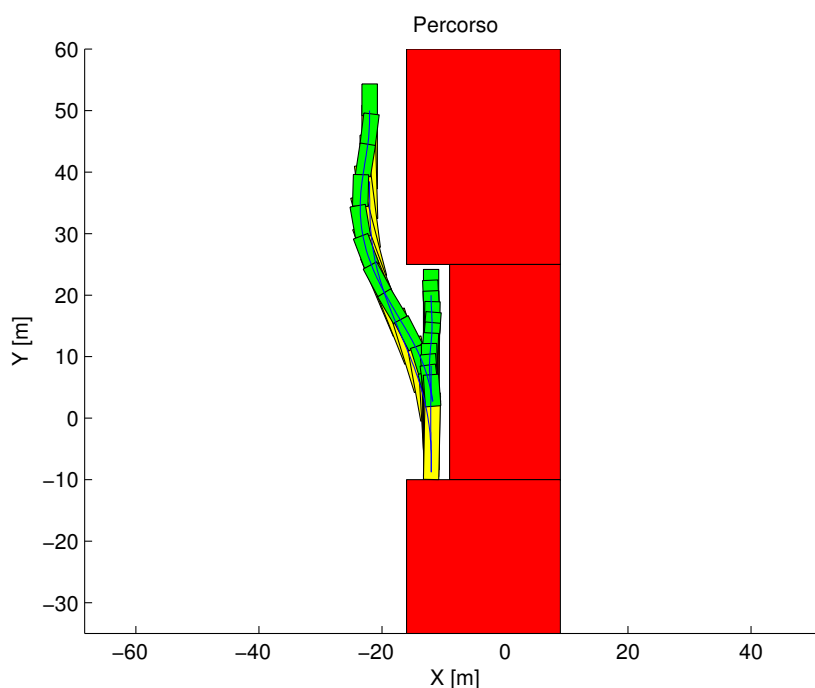


Figura 6.5: *Parcheggio parallelo BF* - Percorso del veicolo con rimorchio

L'ambiente presente in questo scenario mostra gli ostacoli disposti in modo da formare una possibile area di parcheggio per il veicolo con rimorchio. Il veicolo compie un primo tratto in retromarcia per posizionarsi all'interno dell'area designata ed un successivo tratto in avanti per correggere la sua

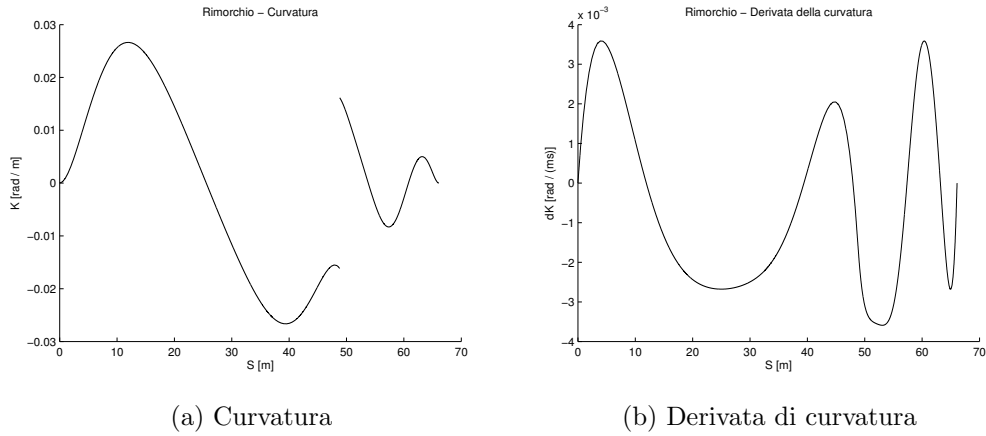


Figura 6.6: *Parcheggio parallelo BF* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del rimorchio

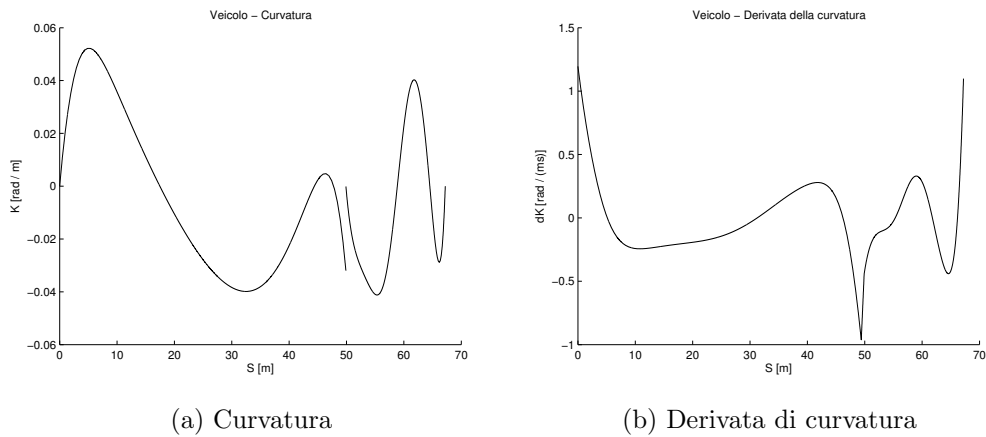


Figura 6.7: *Parcheggio parallelo BF* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del veicolo trainante

posizione.

L'obiettivo di questo scenario è quindi permettere il parcheggio del veicolo con rimorchio congiungendo con continuità geometrica del quarto ordine due tratti di  $\eta^4$ -spline partendo dallo stato iniziale  $\mathcal{A}$  e terminando nello stato finale  $\mathcal{B}$  con velocità nulla. In particolare, gli stati estesi sono rappresentati da

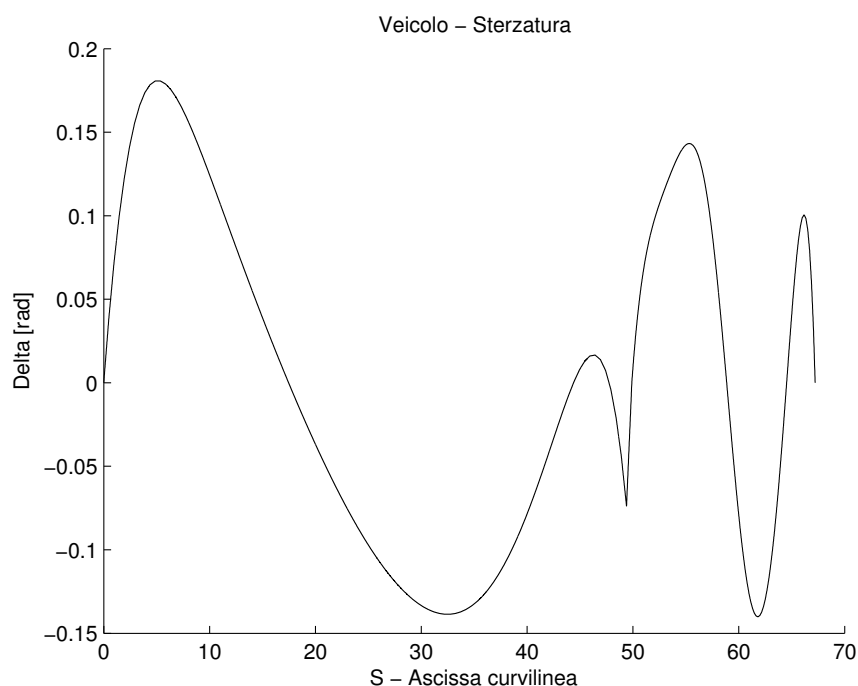


Figura 6.8: *Parcheggio parallelo BF* - Controllo  $\delta(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [-22.5 \quad 50 \quad \pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathcal{B} &= [-12 \quad 20 \quad \pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.\end{aligned}$$

Anche in questo scenario l'ottimizzatore interviene per decidere le condizioni di interpolazione del punto  $\mathcal{M}_1$ .

Nella Figura 6.5 è rappresentato il percorso che deve seguire il veicolo con rimorchio, è indicato con la lettera  $F$  un tratto di curva percorsa in marcia avanti (*forward*) mentre la lettera  $B$  indica un tratto di curva percorsa in marcia indietro (*backward*).

Per quanto riguarda le Figure 6.6 e 6.7 bisogna sottolineare che, a differenza dello scenario *Labirinto*, le funzioni di curvatura (Figure 6.6a e 6.7a) risultano discontinue nel punto di inversione di marcia. Questo è corretto per la definizione di curvatura che, come già evidenziato nel Capitolo 3, dipende dalla direzione di marcia del veicolo. Tenuto conto dell'inversione di marcia che avviene nel punto di interpolazione  $\mathcal{M}_1$  il grafico presente in Figura 6.8

mostra l'andamento del controllo di sterzata del veicolo. Si nota che è presente un cambiamento repentino di sterzata nel punto di inversione di marcia, il che implica un movimento dello sterzo a veicolo fermo. Tale comportamento è giustificato dal fatto che nel punto di inversione di marcia la velocità del veicolo è nulla e quindi non vale la Proposizione 2.1 e non si ha alcuna garanzia sul comportamento dei segnali di controllo in questo punto. Il controllo  $\delta$  non risulta essere di classe  $C^1$ , provoca un movimento dello sterzo a veicolo fermo il che è un comportamento usuale in fase di parcheggio.

## 6.4 Scenario *Parcheggio Perpendicolare*

L'altra possibile modalità di parcheggio, il parcheggio perpendicolare, obbliga il veicolo a cambiare la sua orientazione iniziale per riuscire a completare la manovra. Nella simulazione dell'ambiente è stata modificata la disposizione e la dimensione degli ostacoli per adattarli al caso in esame. Sono proposte due soluzioni al problema con numero di manovre differenti. Nel primo caso è stata impiegata una sola manovra mentre nel secondo caso ne sono state impiegate due.

### 6.4.1 Una manovra - avanti/indietro

Anche in questo caso, il veicolo parte da uno stato iniziale a riposo e, mediante il passaggio in un punto intermedio  $\mathcal{M}_1$ , raggiunge lo stato esteso finale a riposo.

La Figura 6.9 mostra che il veicolo interpola i due stati estesi

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [-30 \quad -30 \quad \pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathcal{B} &= [-10 \quad -6.5 \quad -\pi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.\end{aligned}$$

Anche per questo caso, essendo presente un cambio di marcia, le funzioni di curvatura e derivata di curvatura risultano essere discontinue nel punto di interpolazione (si vedano le Figure 6.10a e 6.11a).

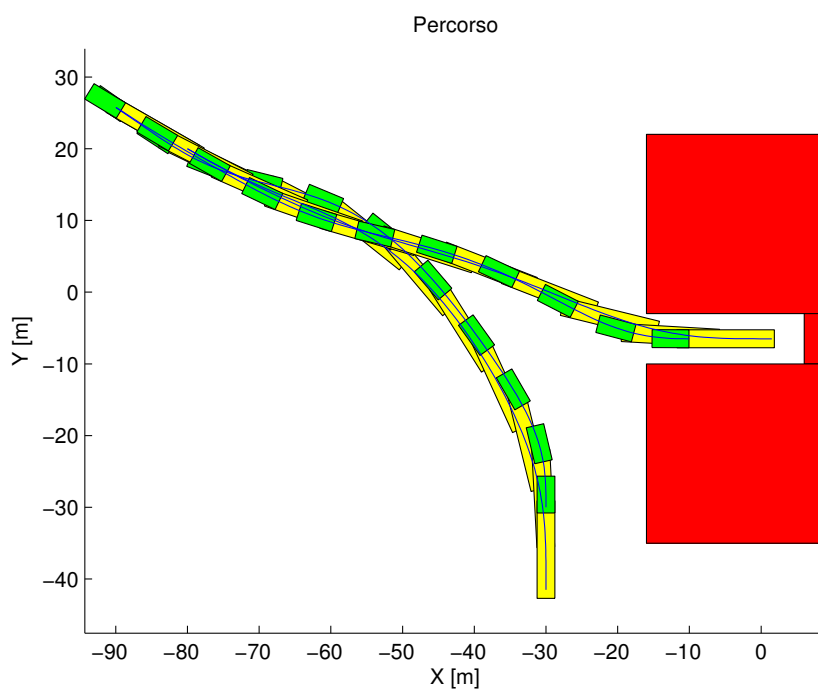


Figura 6.9: *Parcheggio perp. FB* - Percorso del veicolo con rimorchio

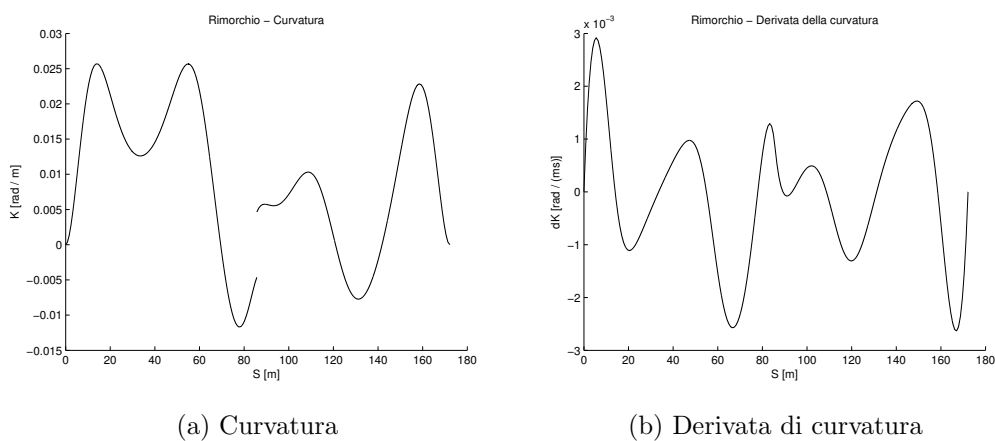


Figura 6.10: *Parcheggio perp. FB* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del rimorchio

La Figura 6.12 mostra l'andamento del segnale di controllo  $\delta(s)$ : come evidenziato nel Paragrafo 6.3.1 il cambio di marcia produce una sterzata repentina del veicolo nel punto di manovra quindi a veicolo fermo.

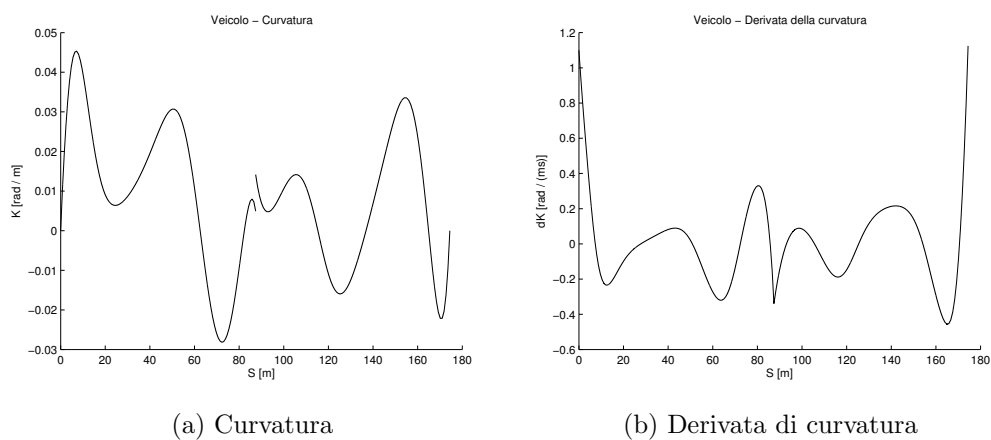


Figura 6.11: *Parcheggio perp. FB* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del veicolo trainante

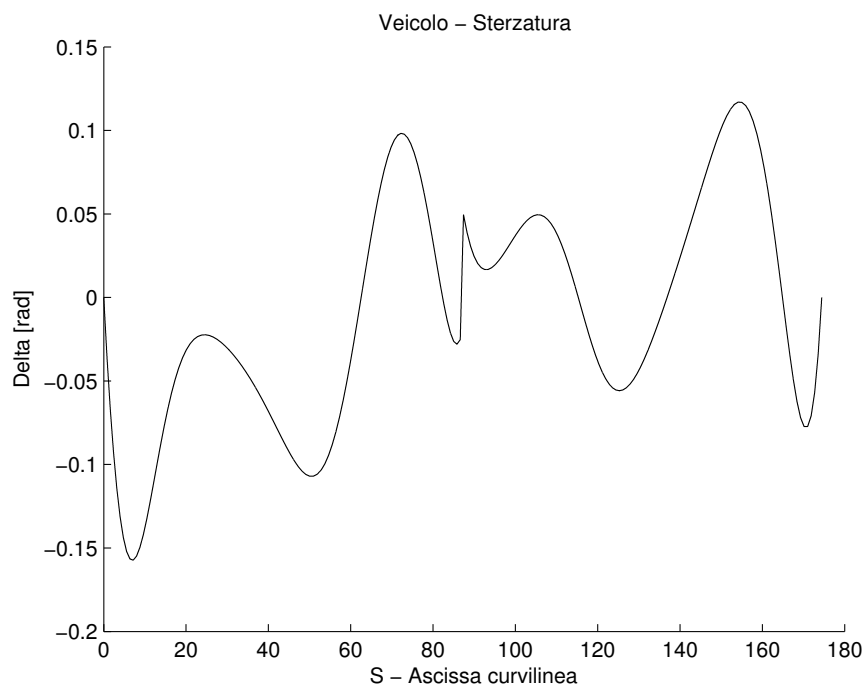


Figura 6.12: *Parcheggio perp. FB* - Controllo  $\delta(s)$

### 6.4.2 Due manovre - avanti/indietro/avanti

Anche per questa tipologia di parcheggio si evidenziano nei grafici le stesse particolarità salienti dei due casi precedenti.

In generale, le funzioni di curvatura, derivata di curvatura e  $\delta(s)$  rispettano i vincoli determinati nel Paragrafo 6.1.2. La necessità di utilizzare due manovre risiede nello stato iniziale in cui si trova il veicolo con rimorchio. Essendo la sua posizione iniziale in prossimità dell'ostacolo, non si riesce, senza violare i vincoli e senza collidere con gli ostacoli, ad eseguire la manovra descritta in Figura 6.9 ossia con una sola manovra. Sono quindi necessarie due manovre con due cambi di marcia. Questo provoca, nella funzione di curvatura, due discontinuità che provocano nella funzione di controllo  $\delta(s)$  due cambi repentini di angolo di sterzata negli istanti di cambio di marcia (si veda la Figura 6.16 a riguardo).

Il percorso del veicolo con rimorchio interpola i due stati estesi

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [-20 \quad -20 \quad \pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathcal{B} &= [-6.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T\end{aligned}$$

mentre i vettori di condizioni iniziali di interpolazione per il percorso del rimorchio sono stati scelti nel seguente modo

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= [-25 \quad 25 \quad \pi/12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{c}_2 &= [-100 \quad -6.5 \quad \pi \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.\end{aligned}$$

Dopo aver eseguito la funzione di ottimizzazione, i parametri che minimizzano il Problema 4.1 risultano avere i seguenti valori.

$\ddot{\kappa}_A$	$\ddot{\kappa}_B$	$\eta_1^{(1)}$	$\eta_2^{(1)}$	$\eta_1^{(2)}$	$\eta_2^{(2)}$	$\eta_1^{(3)}$	$\eta_2^{(3)}$
0.0025	$-3.72 \times 10^{-5}$	56.735	56.718	81.349	81.350	88.499	88.499

$x_{M1}$	$y_{M1}$	$\theta_{M1}$	$\kappa_{M1}$	$\dot{\kappa}_{M1}$	$\ddot{\kappa}_{M1}$
-24.911	25.010	1.0472	-0.0316	-0.0017	-0.0010

$x_{M2}$	$y_{M2}$	$\theta_{M2}$	$\kappa_{M2}$	$\dot{\kappa}_{M2}$	$\ddot{\kappa}_{M2}$
-99.910	-6.501	3.1276	-0.0081	-0.0023	$5.58 \times 10^{-4}$

Si nota una modifica dei parametri di interpolazione che definiscono le  $\eta^4$ -spline per garantire che i vincoli sul percorso complessivo vengano rispettati.

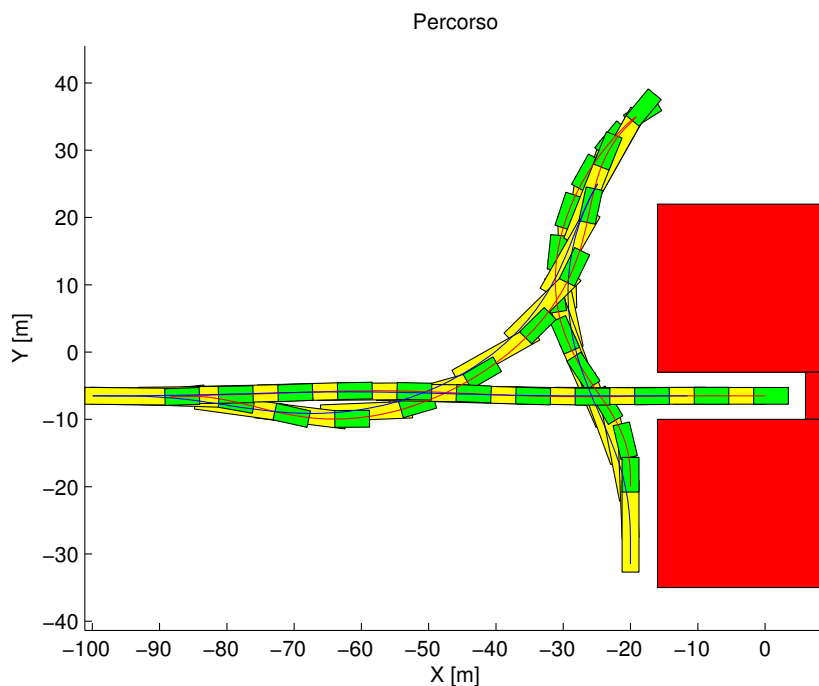


Figura 6.13: *Parcheggio perp. FBF* - Percorso del veicolo con rimorchio

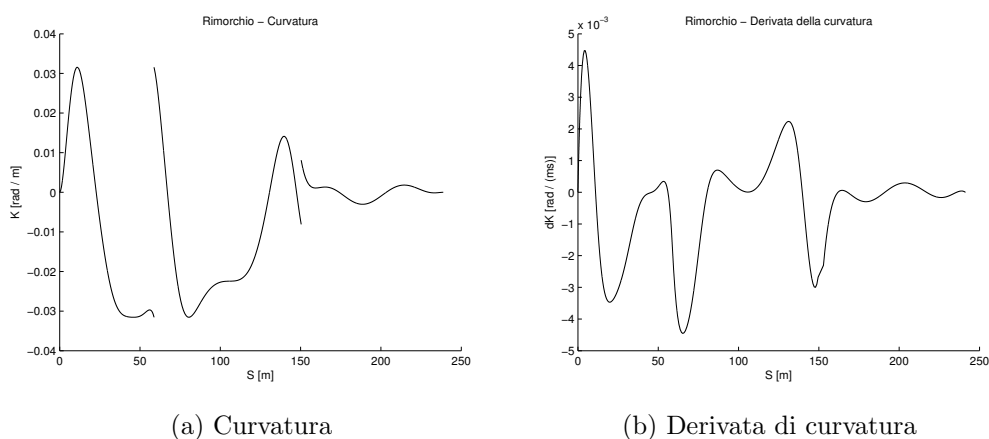


Figura 6.14: *Parcheggio perp. FBF* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del rimorchio

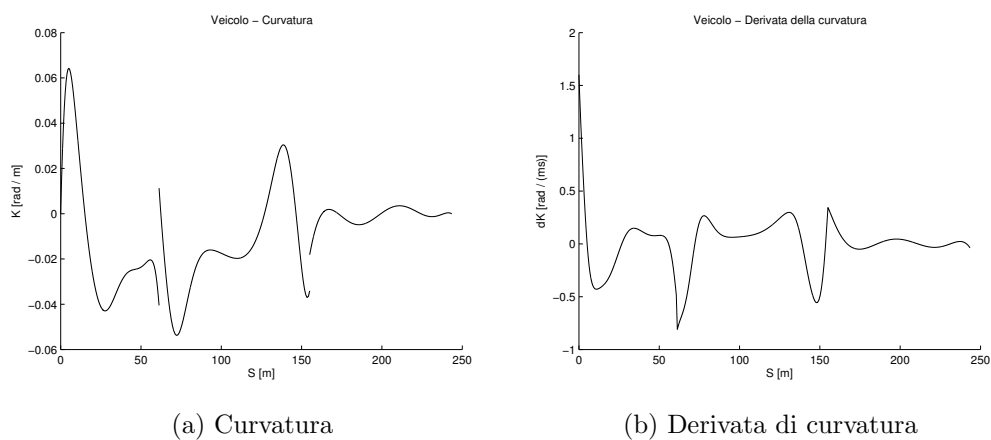


Figura 6.15: *Parcheggio perp. FBF* -  $\kappa(s)$  e  $\dot{\kappa}(s)$  del percorso del veicolo trainante

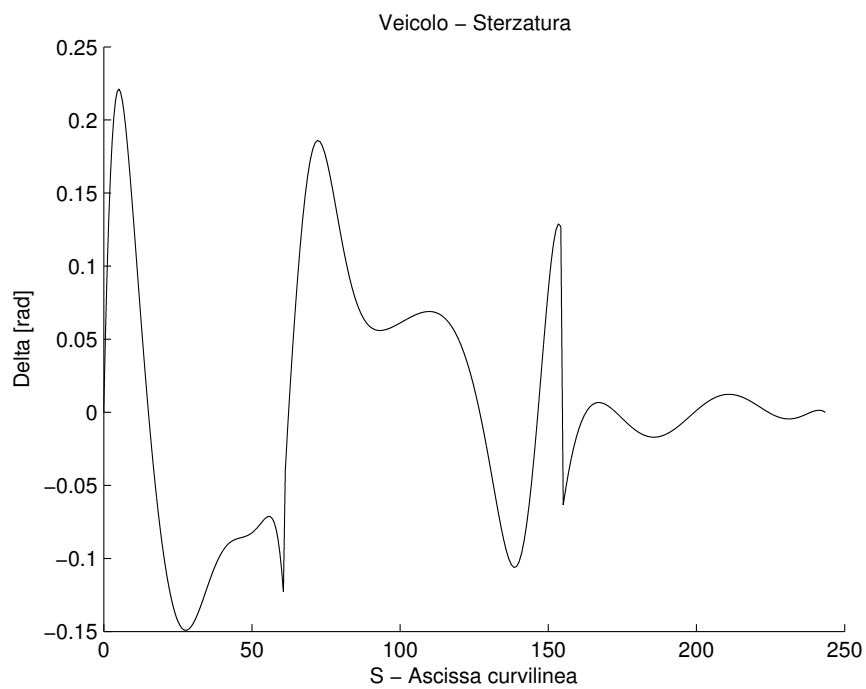


Figura 6.16: *Parcheggio perp. FBF* - Controllo  $\delta(s)$

## 6.5 Simulazione del controllo

Per verificare il corretto funzionamento del controllo del sistema, si è simulato un sistema reale mediante la funzione `ode45` di **MATLAB** che permette di discretizzare le funzioni differenziali descritte nel sistema (5.7) simulando anche il rumore di processo. Si è scelto di pianificare un percorso di *Inversione ad U* in modo da valutare il comportamento dei segnali di controllo a fronte del rumore introdotto nel sistema.

In Figura 6.17 è presentato il percorso pianificato interpolando gli stati estesi

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [-15 \quad -30 \quad 0 \quad 0 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathcal{B} &= [-5 \quad 40 \quad \pi \quad 0 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T\end{aligned}$$

con un tratto di  $\eta^4$ -*spline*. La funzione di *Obstacle avoidance* interviene per evitare la coppia di ostacoli rappresentati dai due rettangoli rossi in Figura 6.17. Si ottiene così un percorso che rispetta i vincoli posti sulla curvatura massima e derivata di curvatura massima del tragitto percorso dal rimorchio. In Figura 6.18 è evidenziato il percorso nominale con due linee blu,

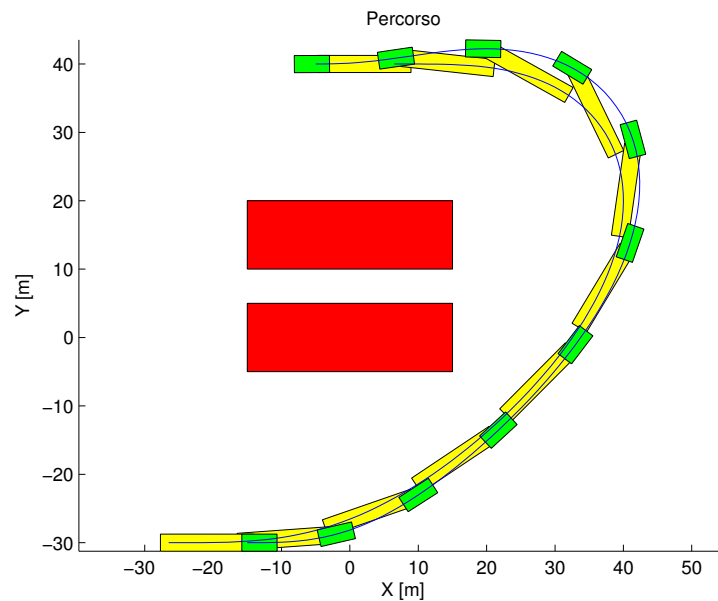


Figura 6.17: *Inversione* - Percorso del veicolo con rimorchio

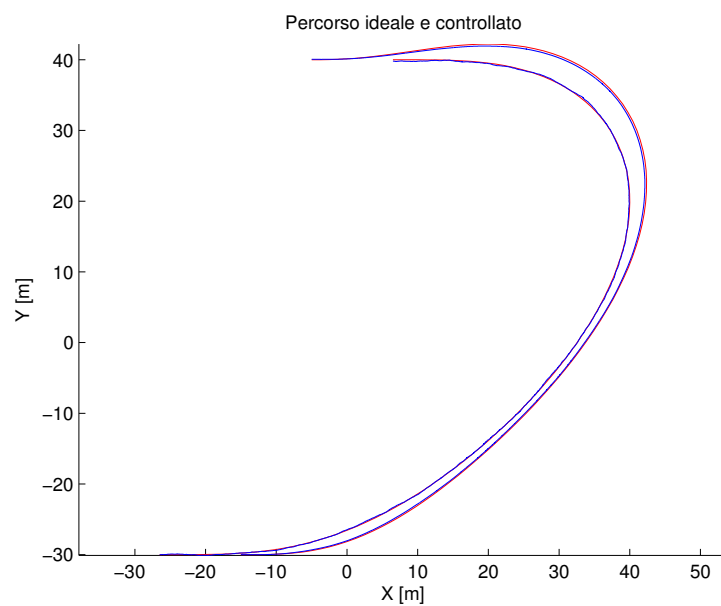


Figura 6.18: *Inversione* - Percorso nominale e perturbato

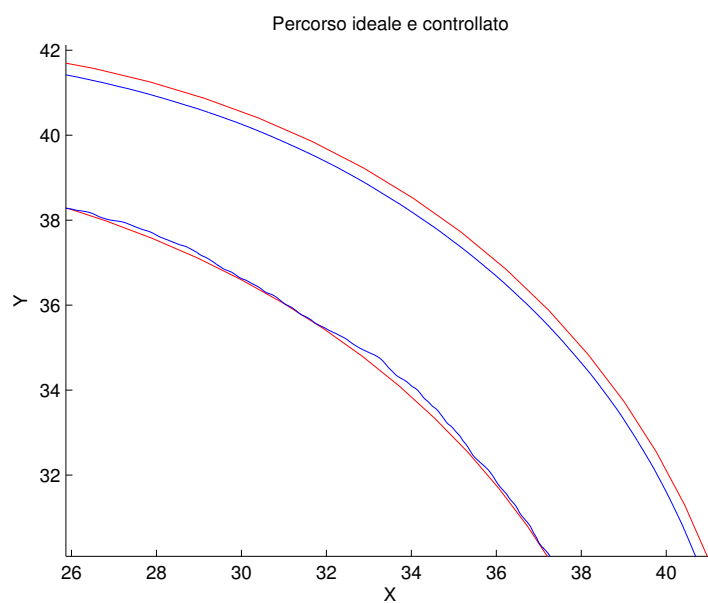


Figura 6.19: *Inversione* - Ingrandimento di una parte del percorso

una per il veicolo e l'altra per il rimorchio, mentre il percorso ottenuto con

il sistema controllato è evidenziato dalla coppia di linee rosse. Si nota che l'introduzione del rumore sul sistema e la relativa scelta del controllo, provocano una variazione limitata della posizione ideale del veicolo con rimorchio. Si è scelto, per semplicità implementativa, di utilizzare come distribuzione di probabilità del processo stocastico associato al rumore, una distribuzione uniforme su di un intervallo chiuso dipendente dal tipo di variabile del sistema. Per visualizzare meglio la variazione sul percorso introdotta dalla simulazione del modello con l'aggiunta di rumore, in Figura 6.19 è mostrato un ingrandimento di un tratto del percorso dove si può notare che la differenza di percorso è confinata in poche decine di centimetri a fronte di un rumore che può modificare la posizione del veicolo in un intervallo chiuso  $[-0.8\text{ m}, 0.8\text{ m}]$ . La scelta dell'intensità del rumore è dovuta al problema di dover inglobare in questo processo tutti le tipologie di errori presenti nel sistema: dagli errori di modellazione, agli errori dovuti ai sensori che devono fornire al controllo lo stato del sistema ad ogni istante di tempo.

In Figura 6.20 è mostrato il segnale di controllo  $\delta(t)$  ottenuto scegliendo come velocità  $v_1(t)$  il segnale costante pari a  $15\text{ m/s}$  che equivalgono a circa  $55\text{ km/h}$ . Il grafico è ottenuto considerando l'andamento dell'angolo di sterzata in *gradi* per una più facile comprensione. Si può notare che il grafico rappresentante l'andamento del segnale perturbato ( $\delta_p(t)$ ) risulta molto disturbato dal rumore. Il motivo è legato all'alto valore che assume il rumore lungo il percorso che costringe al controllore del sistema di correggere molto frequentemente il segnale di controllo  $\delta$ . Si nota anche che il segnale perturbato, rappresentato dal segnale  $\delta_p(t)$ , evolve in un intorno del rispettivo controllo nominale, rappresentato dal segnale  $\delta_n(t)$ , in questo modo riesce a compensare gli errori di posizione che il sistema subisce a causa del rumore. Infine in Figura 6.21 sono rappresentati il controllo  $v(t)$  perturbato e il relativo controllo nominale. Dall'algoritmo di inversione dinamica di percorso descritto nella Sezione 3.6, per ottenere il segnale di controllo  $v(t)$ , ottenuto in modo indipendente dal controllo  $\delta(t)$ , si deve generare un profilo qualunque di classe  $C^1$  della velocità  $v_1(t)$ . Successivamente si ottiene  $v(t)$  mediante

la formula

$$v(t) = \frac{v_1(t)}{\cos(\theta_0(t) - \theta_1(t))}. \quad (6.1)$$

Il segnale  $v_1(t)$  scelto per questa simulazione è il segnale costante pari a

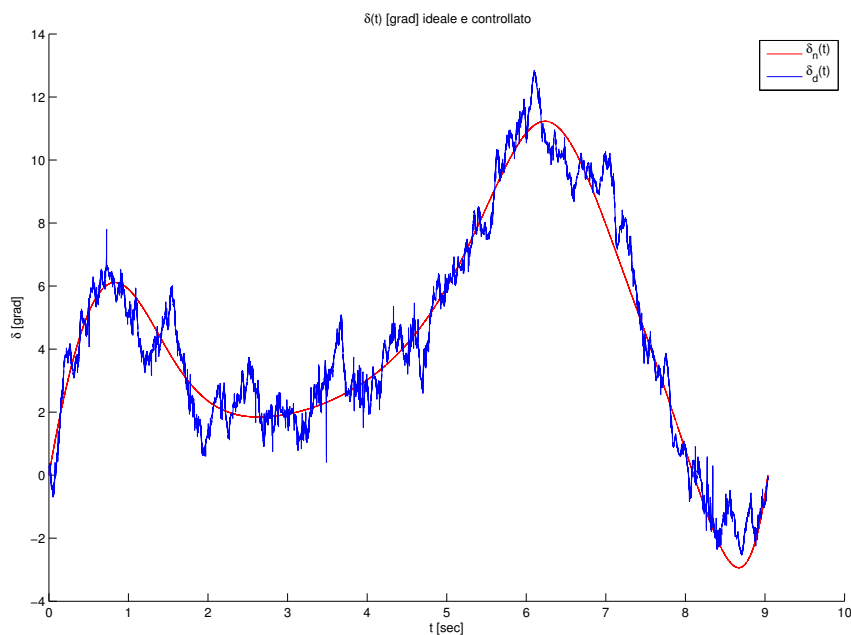


Figura 6.20: *Inversione* -  $\delta(t)$  nominale e perturbato

15  $m/s$ . A seconda della posizione dinamica del veicolo si ottiene il segnale di controllo di velocità della motrice evidenziato in Figura 6.21. Anche in questo caso, il segnale perturbato risulta molto sensibile al rumore.

Osservando l'andamento della segnale di velocità  $v_n(t)$ , si nota che la velocità lineare del veicolo cresce all'aumentare della curvatura del percorso del rimorchio. Questo fatto è causato dalla scelta di tenere un profilo costante per la velocità lineare del rimorchio  $v(t)$ , infatti, quando la curvatura del percorso del rimorchio cresce, il veicolo trainante deve percorrere più spazio del rimorchio. Per mantenere la velocità del rimorchio costante si deve aumentare la velocità del veicolo che, nel caso specifico, si porta ad un valore massimo di 18  $m/s$  che equivalgono a circa 65  $km/h$ . Ovviamente, in uno scenario

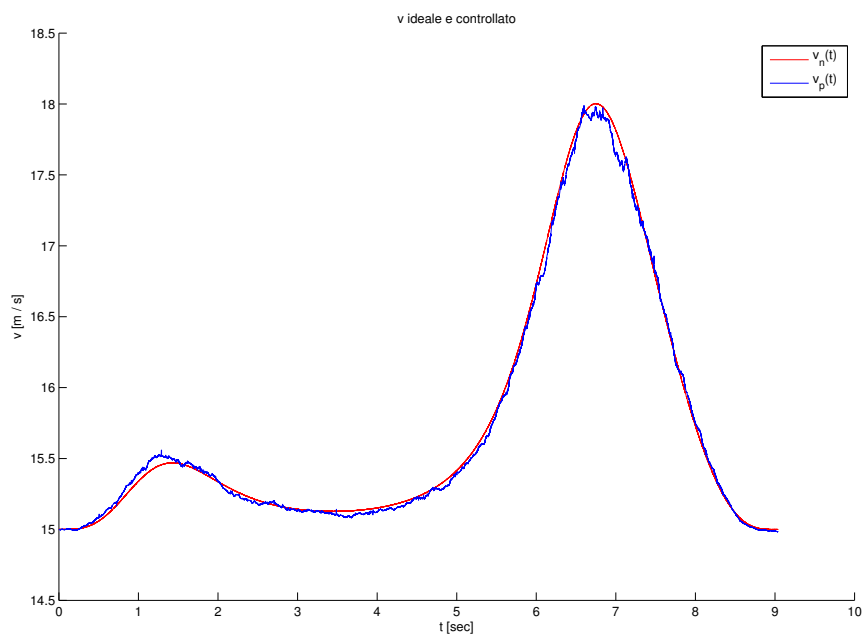


Figura 6.21: *Inversione* -  $v(t)$  nominale e perturbato

reale, una pianificazione della velocità del rimorchio come segnale costante non sarebbe una scelta efficace. In questo lavoro di tesi si è cercato di trovare una soluzione generale al problema di pianificazione e controllo del moto di veicoli con rimorchio, non certo di trovare una strategia ottimale per ottenere un controllo rispondente a problemi specifici. Si deve però specificare che la scelta di un profilo di velocità particolare, che risponde a problematiche specifiche, non preclude la validità della teoria e degli strumenti sviluppati in questo lavoro.

# Conclusioni

Il lavoro di tesi ha presentato una nuova primitiva di curva per la generazione di un percorso di classe  $G^4$  per la movimentazione di veicoli con rimorchio. Questa primitiva è stata dedotta dando soluzione completa al problema di interpolazione polinomiale di classe  $G^4$  ossia interpolando due punti qualsiasi del piano cartesiano considerando anche i vettori tangenti alla curva, le curvature, le derivate di curvatura e le derivate seconde di curvatura nei punti estremi. Per generare un controllo di classe  $C^1$  per il veicolo con rimorchio si è risolto il problema di inversione dinamica di percorso. Il problema, per essere ben posto, necessita la pianificazione di percorsi, per il punto medio dell'asse ruota del rimorchio, con continuità geometrica del quarto ordine. La primitiva  $\eta^4$ -*spline* permette di ottenere, nei punti di interpolazione, la continuità geometrica richiesta dal problema di inversione dinamica di percorso.

La soluzione proposta, facilmente implementabile su elaboratore, prevede l'assegnazione arbitraria dello stato iniziale e finale del veicolo permettendo di movimentare in modo "liscio" il veicolo con rimorchio inserendo dei punti di interpolazione intermedi necessari per garantirne il funzionamento corretto in scenari realistici.

La funzione di ottimizzazione implementata permette di generare un percorso che rispetta i vincoli fisici del veicolo con rimorchio.

L'implementazione del sistema di controllo mediante la teoria dei sistema "flat" permette di ottenere dei segnali di controllo facilmente attuabili su un sistema reale. Grazie alla decomposizione velocità-percorso è possibile

pianificare il controllo di sterzata  $\delta(t)$  e di velocità lineare  $v(t)$  in modo indipendente. Si riescono a risolvere una vasta gamma di problemi di movimentazione del veicolo semplicemente adottando una strategia di segnale di controllo adeguata al problema da risolvere.

In un sistema generale di navigazione automatica per veicoli su ruote, in particolare per veicoli con rimorchio, la tesi propone un nuovo strumento di generazione di percorsi necessari ad un sistema supervisore per connettere punti intermedi nel suo compito di navigazione. Rimane come sviluppo futuro, l'applicazione del sistema sviluppato a prototipi oppure a veicoli con rimorchio commerciali. In aggiunta, il controllo *feedforward-feedback* implementato è solo uno dei possibili metodi di controllo per un veicolo con rimorchio. In futuro si potrebbero implementare strategie di controllo differenti per valutare quale produca un comportamento dinamico del veicolo migliore.

# Appendice A

## $\eta^4$ -spline caso generale

*Riprendendo i concetti della teoria delle curve planari espressi nel Capitolo 2, l'appendice mostra i coefficienti per le  $\eta^4$ -spline in modo completo. In seguito sono riportate le proprietà di cui gode la curva parametrica.*

### A.1 Derivazione geometrica

Come già mostrato nel Capitolo 2, la determinazione dei coefficienti per le  $\eta^4$ -spline avviene tramite la risoluzione del sistema (2.6).

Per la discussione sul significato geometrico delle equazioni presenti nel sistema (2.6) si rimanda alla Sezione 2.1. In seguito, nella Sezione A.2, sono esposti i coefficienti delle  $\eta^4$ -spline riportati in modo completo.

## A.2 Calcolo dei coefficienti

Ricordando la definizione di curva riportata nel Capitolo 2, si definiscono le funzioni  $\alpha(u)$  e  $\beta(u)$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} \alpha(u) &:= \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \alpha_5 u^5 + \\ &\quad + \alpha_6 u^6 + \alpha_7 u^7 + \alpha_8 u^8 + \alpha_9 u^9 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \beta(u) &:= \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + \beta_5 u^5 + \\ &\quad + \beta_6 u^6 + \beta_7 u^7 + \beta_8 u^8 + \beta_9 u^9 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

I coefficienti polinomiali sono ottenuti dalle seguenti espressioni in forma chiusa:

$$\alpha_0 = x_A \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha_1 = \eta_1 \cos \theta_A \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \eta_3 \cos \theta_A - \frac{1}{2} \eta_1^2 \kappa_A \sin \theta_A \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha_3 = - \left( \frac{1}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{1}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \frac{1}{6} \eta_5 \cos \theta_A \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= - \left( \frac{1}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{1}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{1}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\ &\quad - \frac{1}{8} \eta_3 \kappa_A \sin \theta_A + \frac{1}{24} \eta_7 \cos \theta_A \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= 126 (x_B - x_A) - \left( 70 \eta_1 + \frac{35}{2} \eta_3 + \frac{5}{2} \eta_5 + \frac{5}{24} \eta_7 \right) \cos \theta_A + \\ &\quad + \left( \frac{35}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\ &\quad + \left( \frac{15}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{8} \eta_3^2 \kappa_A \right) \sin \theta_A + \\ &\quad + \left( -56 \eta_2 + \frac{21}{2} \eta_4 - \eta_6 + \frac{1}{24} \eta_8 \right) \cos \theta_B + \\ &\quad + \left( -\frac{21}{2} \eta_2^2 \kappa_B - \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 + \eta_2^3 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B + \\ &\quad + \left( 3 \eta_2 \eta_4 \kappa_B - \frac{1}{6} \eta_2 \eta_6 \kappa_B - \frac{1}{4} \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{8} \eta_4^2 \kappa_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\alpha_6 = -420 (x_B - x_A) + \left( 224 \eta_1 + \frac{105}{2} \eta_3 + \frac{20}{3} \eta_5 + \frac{5}{12} \eta_7 \right) \cos \theta_A -$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{105}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{20}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\
& - \left( 20 \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{3} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{2} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{4} \eta_3^2 \kappa_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( 196 \eta_2 - \frac{77}{2} \eta_4 + \frac{23}{6} \eta_6 - \frac{1}{6} \eta_8 \right) \cos \theta_B + \\
& + \left( \frac{77}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{23}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B + \\
& + \left( -\frac{23}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B + \frac{2}{3} \eta_2 \eta_6 \kappa_B + \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{2} \eta_4^2 \kappa_B \right) \sin \theta_B \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_7 = 540 (x_B - x_A) & - \left( 280 \eta_1 + 63 \eta_3 + \frac{15}{2} \eta_5 + \frac{5}{12} \eta_7 \right) \cos \theta_A + \\
& + \left( 63 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{15}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( \frac{45}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{3} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{2} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{4} \eta_3^2 \kappa_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( -260 \eta_2 + 53 \eta_4 - \frac{11}{2} \eta_6 + \frac{1}{4} \eta_8 \right) \cos \theta_B + \\
& + \left( -53 \eta_2^2 \kappa_B - \frac{3}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 + \frac{11}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B + \\
& + \left( \frac{33}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B - \eta_2 \eta_6 \kappa_B - \frac{3}{2} \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B - \frac{3}{4} \eta_4^2 \kappa_B \right) \sin \theta_B \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_8 = -315 (x_B - x_A) & + \left( 160 \eta_1 + 35 \eta_3 + 4 \eta_5 + \frac{5}{24} \eta_7 \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( 35 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + 4 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\
& - \left( 12 \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{8} \eta_3^2 \kappa_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( 155 \eta_2 - \frac{65}{2} \eta_4 + \frac{7}{2} \eta_6 - \frac{1}{6} \eta_8 \right) \cos \theta_B + \\
& + \left( \frac{65}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{7}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B + \\
& + \left( -\frac{21}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B + \frac{2}{3} \eta_2 \eta_6 \kappa_B + \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{2} \eta_4^2 \kappa_B \right) \sin \theta_B \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

$$\alpha_9 = 70 (x_B - x_A) - \left( 35 \eta_1 + \frac{15}{2} \eta_3 + \frac{5}{6} \eta_5 + \frac{1}{24} \eta_7 \right) \cos \theta_A +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{15}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{1}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( \frac{5}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{1}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{1}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{8} \eta_3^2 \kappa_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( -35 \eta_2 + \frac{15}{2} \eta_4 - \frac{5}{6} \eta_6 + \frac{1}{24} \eta_8 \right) \cos \theta_B + \\
& + \left( -\frac{15}{2} \eta_2^2 \kappa_B - \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 + \frac{5}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B + \\
& + \left( \frac{5}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B - \frac{1}{6} \eta_2 \eta_6 \kappa_B - \frac{1}{4} \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{8} \eta_4^2 \kappa_B \right) \sin \theta_B \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

$$\beta_0 = y_A \quad (\text{A.13})$$

$$\beta_1 = \eta_1 \sin \theta_A \quad (\text{A.14})$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \eta_3 \sin \theta_A - \frac{1}{2} \eta_1^2 \kappa_A \cos \theta_A \quad (\text{A.15})$$

$$\beta_3 = \left( \frac{1}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{1}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \frac{1}{6} \eta_5 \sin \theta_A \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 = & \left( \frac{1}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{1}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{1}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\
& + \frac{1}{8} \eta_3 \kappa_A \cos \theta_A + \frac{1}{24} \eta_7 \sin \theta_A \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_5 = & 126 (y_B - y_A) + \left( 70 \eta_1 + \frac{35}{2} \eta_3 + \frac{5}{2} \eta_5 + \frac{5}{24} \eta_7 \right) \sin \theta_A - \\
& - \left( \frac{35}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( \frac{15}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{8} \eta_3^2 \kappa_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( -56 \eta_2 + \frac{21}{2} \eta_4 - \eta_6 + \frac{1}{24} \eta_8 \right) \sin \theta_B - \\
& - \left( -\frac{21}{2} \eta_2^2 \kappa_B - \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 + \eta_2^3 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B - \\
& - \left( 3 \eta_2 \eta_4 \kappa_B - \frac{1}{6} \eta_2 \eta_6 \kappa_B - \frac{1}{4} \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{8} \eta_4^2 \kappa_B \right) \cos \theta_B \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

$$\beta_6 = -420 (y_B - y_A) - \left( 224 \eta_1 + \frac{105}{2} \eta_3 + \frac{20}{3} \eta_5 + \frac{5}{12} \eta_7 \right) \sin \theta_A +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{105}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{20}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\
& + \left( 20 \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{3} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{2} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{4} \eta_3^2 \kappa_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( 196 \eta_2 - \frac{77}{2} \eta_4 + \frac{23}{6} \eta_6 - \frac{1}{6} \eta_8 \right) \sin \theta_B - \\
& - \left( \frac{77}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{23}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B - \\
& - \left( -\frac{23}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B + \frac{2}{3} \eta_2 \eta_6 \kappa_B + \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{2} \eta_4^2 \kappa_B \right) \cos \theta_B \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_7 = & 540 (y_B - y_A) + \left( 280 \eta_1 + 63 \eta_3 + \frac{15}{2} \eta_5 + \frac{5}{12} \eta_7 \right) \sin \theta_A - \\
& - \left( 63 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{15}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( \frac{45}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{3} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{2} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{4} \eta_3^2 \kappa_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( -260 \eta_2 + 53 \eta_4 - \frac{11}{2} \eta_6 + \frac{1}{4} \eta_8 \right) \sin \theta_B - \\
& - \left( -53 \eta_2^2 \kappa_B - \frac{3}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 + \frac{11}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B - \\
& - \left( \frac{33}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B - \eta_2 \eta_6 \kappa_B - \frac{3}{2} \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B - \frac{3}{4} \eta_4^2 \kappa_B \right) \cos \theta_B \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_8 = & -315 (y_B - y_A) - \left( 160 \eta_1 + 35 \eta_3 + 4 \eta_5 + \frac{5}{24} \eta_7 \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( 35 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{5}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + 4 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\
& + \left( 12 \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{5}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{5}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{5}{8} \eta_3^2 \kappa_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( 155 \eta_2 - \frac{65}{2} \eta_4 + \frac{7}{2} \eta_6 - \frac{1}{6} \eta_8 \right) \sin \theta_B - \\
& - \left( \frac{65}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{1}{2} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{7}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{6} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B - \\
& - \left( -\frac{21}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B + \frac{2}{3} \eta_2 \eta_6 \kappa_B + \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{2} \eta_4^2 \kappa_B \right) \cos \theta_B \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

$$\beta_9 = 70 (y_B - y_A) + \left( 35 \eta_1 + \frac{15}{2} \eta_3 + \frac{5}{6} \eta_5 + \frac{1}{24} \eta_7 \right) \sin \theta_A -$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{15}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{1}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{5}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\
 & - \left( \frac{5}{2} \eta_1 \eta_3 \kappa_A + \frac{1}{6} \eta_1 \eta_5 \kappa_A + \frac{1}{4} \eta_1^2 \eta_3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{8} \eta_3^2 \kappa_A \right) \cos \theta_A - \\
 & - \left( -35 \eta_2 + \frac{15}{2} \eta_4 - \frac{5}{6} \eta_6 + \frac{1}{24} \eta_8 \right) \sin \theta_B - \\
 & - \left( -\frac{15}{2} \eta_2^2 \kappa_B - \frac{1}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 + \frac{5}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B - \\
 & - \left( \frac{5}{2} \eta_2 \eta_4 \kappa_B - \frac{1}{6} \eta_2 \eta_6 \kappa_B - \frac{1}{4} \eta_2^2 \eta_4 \dot{\kappa}_B - \frac{1}{8} \eta_4^2 \kappa_B \right) \cos \theta_B. \quad (\text{A.22})
 \end{aligned}$$

I termini  $\eta_i$ , con  $i = 1, \dots, 8$ , possono essere scelti liberamente ed influenzano l'andamento del cammino senza violare le condizioni di interpolazione. Possono essere inseriti in un vettore colonna di dimensione otto

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5 \ \eta_6 \ \eta_7 \ \eta_8]^T$$

e le curve parametriche A.1 e A.2 saranno d'ora in poi indicate come  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  o  $\eta^4$ -spline.

### A.3 Proprietà delle $\eta^4$ -spline

La correttezza delle relazioni (A.3) - (A.22) viene garantita dalla seguente proposizione.

**Proposizione A.1.** *La curva parametrica  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  soddisfa ogni dato insieme di valori  $\mathbf{p}_A, \theta_A, \kappa_A, \dot{\kappa}_A, \ddot{\kappa}_A$  e  $\mathbf{p}_B, \theta_B, \kappa_B, \dot{\kappa}_B, \ddot{\kappa}_B$  delle condizioni di interpolazione, per ogni  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}$  dove  $\mathcal{H} := \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^6$*

Si riportano in seguito le proprietà di cui gode ogni  $\eta^4$ -spline.

**Proprietà A.1** (completezza). *Data ogni curva polinomiale del nono ordine  $\mathbf{q}(u)$ ,  $u \in [0, 1]$ , con  $\dot{\mathbf{q}}(0) \neq 0$  e  $\dot{\mathbf{q}}(1) \neq 0$ , tale che soddisfi un insieme di condizioni di interpolazione  $\mathbf{p}_A, \theta_A, \kappa_A, \dot{\kappa}_A, \ddot{\kappa}_A$  e  $\mathbf{p}_B, \theta_B, \kappa_B, \dot{\kappa}_B, \ddot{\kappa}_B$ , allora esiste un vettore di parametri  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}$  tale che  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  coincide con  $\mathbf{q}(u)$ .*

La prossima proprietà si focalizza sulla minimalità delle  $\eta^4$ -spline.

**Proprietà A.2** (minimalità). *La curva  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  è la curva polinomiale del minimo ordine che interpola ogni insieme arbitrario di dati  $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta_A, \theta_B \in [0, 2\pi)$ ,  $\kappa_A, \kappa_B \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{\kappa}_A, \dot{\kappa}_B \in \mathbb{R}$  e  $\ddot{\kappa}_A, \ddot{\kappa}_B \in \mathbb{R}$ .*

Come mostrano la Proposizione A.1 e la Proprietà A.2, le  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline sono la soluzione per il problema introdotto di interpolazione  $G^4$ . Inoltre le  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline sono una famiglia di curve che dipende da una parametrizzazione simmetrica indotta dalla scelta del vettore  $\boldsymbol{\eta}$ . Questa proprietà, che verrà formalmente introdotta di seguito, può essere utile per formare le  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline, variando i parametri  $\eta_i$ .

**Proprietà A.3** (simmetria). *Si assuma  $\eta_1 = \eta_2 = v \in \mathbb{R}_+$ ,  $\eta_3 = -\eta_4 = w \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_5 = \eta_6 = z \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_7 = \eta_8 = t \in \mathbb{R}$  e definiamo  $\boldsymbol{\eta} = [v \ v \ w \ w - z \ z \ t \ t]^T$ . Si consideri inoltre  $\theta_A = \theta_B = \theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\kappa_A = \kappa_B = 0$ ,  $\dot{\kappa}_A = \dot{\kappa}_B = 0$  e  $\ddot{\kappa}_A = \ddot{\kappa}_B = 0$ . Allora, per qualsiasi  $\mathbf{p}_A$  e  $\mathbf{p}_B$ , la curva  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  soddisfa la seguente condizione di simmetria*

$$\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}(1-u, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall u \in [0, 1], \forall v \in \mathbb{R}_+, \forall w, z, t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.23})$$

Le  $\boldsymbol{\eta}^4$ -spline possono essere utilizzate per generare o approssimare una varietà di cammini, come ad esempio spirali, archi circolari ed altri. La primitiva fondamentale è la linea segmento, che può essere ottenuta con le appropriate condizioni di interpolazione.

**Proprietà A.4** (generazione di un segmento). *Definiamo  $d = \|\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A\|$ , ed assumiamo  $x_B = x_A + d \cos \theta$ ,  $y_B = y_A + d \sin \theta$ ,  $\theta_A = \theta_B = \theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\kappa_A = \kappa_B = 0$ ,  $\dot{\kappa}_A = \dot{\kappa}_B = 0$  e  $\ddot{\kappa}_A = \ddot{\kappa}_B = 0$ . Allora,  $\mathbf{p}(u, \boldsymbol{\eta})$  è un segmento  $\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}$ .*

# Appendice B

## $\eta^5$ -spline caso semplificato

L'appendice mostra il problema di interpolazione  $G^5$  ed una possibile soluzione mediante le  $\eta^5$ -spline. La deduzione dei coefficienti di questa curva è espressa solo per il caso semplificato in cui  $\eta_i = 0$  con  $i = 3, \dots, 10$  e  $\ddot{\kappa}_A = \ddot{\kappa}_B = 0$ .

### B.1 Derivazione geometrica

**Problema B.1** (Interpolazione polinomiale di classe  $G^5$ ). *Determinare la curva polinomiale del minimo ordine che interpoli due dati punti  $\mathbf{p}_A = [x_A, y_A]^T$  e  $\mathbf{p}_B = [x_B, y_B]^T$  con associati i vettori tangenti definiti dagli angoli  $\theta_A$  e  $\theta_B$ , le curvatures scalari  $\kappa_A$  e  $\kappa_B$ , le derivate delle curvatures rispetto alla lunghezza dell'arco  $\dot{\kappa}_A$  e  $\dot{\kappa}_B$ , le derivate seconde e le derivate terze delle curvatures rispetto alla lunghezza dell'arco  $\ddot{\kappa}_A$ ,  $\ddot{\kappa}_B$ ,  $\dddot{\kappa}_A$  e  $\dddot{\kappa}_B$ . Si consideri che i dati di interpolazione,  $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta_A, \theta_B \in [0, 2\pi)$ ,  $\kappa_A, \kappa_B \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{\kappa}_A, \dot{\kappa}_B \in \mathbb{R}$ ,  $\ddot{\kappa}_A, \ddot{\kappa}_B \in \mathbb{R}$  e  $\dddot{\kappa}_A, \dddot{\kappa}_B \in \mathbb{R}$ , possono essere assegnati arbitrariamente.*

La soluzione a questo problema di interpolazione è data dalla curva polinomiale dell'undicesimo ordine  $\mathbf{p}(u) = [\alpha(u) \beta(u)]^T$ , con  $u \in [0, 1]$ , definita

come segue:

$$\begin{aligned} \alpha(u) := & \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \alpha_5 u^5 + \\ & + \alpha_6 u^6 + \alpha_7 u^7 + \alpha_8 u^8 + \alpha_9 u^9 + \alpha_{10} u^{10} + \alpha_{11} u^{11} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \beta(u) := & \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + \beta_5 u^5 + \\ & + \beta_6 u^6 + \beta_7 u^7 + \beta_8 u^8 + \beta_9 u^9 + \beta_{10} u^{10} + \beta_{11} u^{11}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Prendendo come riferimento la Sezione 2.1 si introduce la definizione di derivata terza di curvatura rispetto alla lunghezza dell'arco  $s$ .

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{d^2 \kappa}{ds^2} \right) = \frac{d}{du} \left( \frac{d^2 \kappa}{ds^2} \right) \frac{du}{ds} = \frac{d}{du} \left( \frac{d^2 \kappa}{ds^2} \right) \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(u)\|}$$

ovvero

$$\frac{d^3 \kappa}{ds^3}(u) = \frac{d}{du} \left( \frac{d^2 \kappa}{ds^2}(u) \right) \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(u)\|}. \quad (\text{B.3})$$

Ora si è in grado di impostare il sistema di equazioni per risolvere il Problema B.1.

Seguendo un procedimento analogo a quello mostrato in Sezione 2.1 si ottengono i 24 coefficienti richiesti. Bisogna precisare che la risoluzione delle equazioni (B.7g) e (B.7h) necessitano del calcolo esplicito della derivata terza di curvatura. Questa formula si ricava dalla differenziazione esplicita rispetto ad  $u$  della formula espressa in equazione (2.27), ovvero

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \kappa}{du^3}(u) = & \frac{1}{(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^6} \left[ (\dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta} + 2\ddot{\alpha} \ddot{\beta} - 2\ddot{\alpha} \ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^3 - \right. \\ & - 12(\dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta} + \ddot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \ddot{\beta})(\dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^2 - \\ & - 10(\dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta})(\ddot{\alpha}^2 + \ddot{\beta}^2 + \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^2 + \\ & + 67(\dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta})(\dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \ddot{\beta})^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - \\ & - 3(\dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta})(3\ddot{\alpha} \ddot{\alpha} + 3\ddot{\beta} \ddot{\beta} + \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)^2 + \\ & + 57(\dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta})(\ddot{\alpha}^2 + \ddot{\beta}^2 + \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \ddot{\beta})(\dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \ddot{\beta})(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - \\ & \left. - 162(\dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta})(\dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \ddot{\beta})^3 \right] (u). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Il problema è stato risolto in maniera semplificata imponendo le seguenti ulteriori condizioni.

$$\eta_i = 0 \quad \text{con } i = 3, \dots, 10 \quad (\text{B.5})$$

$$\ddot{\kappa}_A = \ddot{\kappa}_B = 0. \quad (\text{B.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_A \end{array} \right. \quad (\text{B.7a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_B \end{array} \right. \quad (\text{B.7b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}}(0) = \eta_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{B.7c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}}(1) = \eta_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{B.7d})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(0) = \kappa_A \end{array} \right. \quad (\text{B.7e})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(1) = \kappa_B \end{array} \right. \quad (\text{B.7f})$$

...

...

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3 \kappa}{ds^3}(0) = \ddot{\kappa}_A \end{array} \right. \quad (\text{B.7g})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3 \kappa}{ds^3}(1) = \ddot{\kappa}_B \end{array} \right. \quad (\text{B.7h})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \ddot{\mathbf{p}}(0), \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \rangle = \eta_3 \end{array} \right. \quad (\text{B.7i})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \ddot{\mathbf{p}}(1), \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \rangle = \eta_4 \end{array} \right. \quad (\text{B.7j})$$

...

...

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \overset{\dots}{\mathbf{p}}(0), \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} \rangle = \eta_9 \end{array} \right. \quad (\text{B.7k})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \overset{\dots}{\mathbf{p}}(1), \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} \rangle = \eta_{10} \end{array} \right. \quad (\text{B.7l})$$

con

$$\eta_1, \eta_2 > 0, \quad \eta_i \in \mathbb{R} \text{ con } i = 3, \dots, 10.$$

## B.2 Calcolo dei coefficienti

I coefficienti polinomiali, tenuto conto delle condizioni (B.5) e (B.6), sono ottenuti dalle seguenti espressioni in forma chiusa:

$$\alpha_0 = x_A \quad (\text{B.8})$$

$$\alpha_1 = \eta_1 \cos \theta_A \quad (\text{B.9})$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \eta_1^2 \kappa_A \sin \theta_A \quad (\text{B.10})$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A \sin \theta_A \quad (\text{B.11})$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{24} \eta_1^4 (3 \kappa_A^3 + \ddot{\kappa}_A) \sin \theta_A \quad (\text{B.12})$$

$$\alpha_5 = -\frac{19}{120} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A \sin \theta_A \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \alpha_6 = & 462 (x_B - x_A) - 252 \eta_1 \cos \theta_A - 210 \eta_2 \cos \theta_B + \\ & + \left( 63 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{21}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{20} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + \frac{28}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{7}{8} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\ & - \left( 42 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{7}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{120} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{14}{3} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{7}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \alpha_7 = & -1980 (x_B - x_A) + 1050 \eta_1 \cos \theta_A + 930 \eta_2 \cos \theta_B - \\ & - \left( 252 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{35}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{8} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + 35 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{35}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\ & + \left( 192 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{17}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{24} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - 22 \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{17}{12} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \alpha_8 = & 3465 (x_B - x_A) - 1800 \eta_1 \cos \theta_A - 1665 \eta_2 \cos \theta_B + \\ & + \left( 420 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{105}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{6} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + 56 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{35}{8} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\ & - \left( \frac{705}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{33}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{12} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{83}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{11}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\alpha_9 = -3080 (x_B - x_A) + 1575 \eta_1 \cos \theta_A + 1505 \eta_2 \cos \theta_B -$$

$$\begin{aligned}
& - \left( 360 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{21}{2} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{8} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + \frac{140}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{7}{2} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( 325 \eta_2^2 \kappa_B + 8 \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{12} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{235}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{8}{3} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} = & 1386 (x_B - x_A) - 700 \eta_1 \cos \theta_A - 686 \eta_2 \cos \theta_B + \\
& + \left( \frac{315}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{35}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{20} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + 20 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{35}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A - \\
& - \left( \frac{301}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{31}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{24} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{37}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{31}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} = & - 252 (x_B - x_A) + 126 \eta_1 \cos \theta_A + 126 \eta_2 \cos \theta_B - \\
& - \left( 28 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{3}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{120} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + \frac{7}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{4} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \sin \theta_A + \\
& + \left( 28 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{3}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{120} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{7}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \sin \theta_B
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\beta_0 = y_A \tag{B.20}$$

$$\beta_1 = \eta_1 \sin \theta_A \tag{B.21}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \eta_1^2 \kappa_A \cos \theta_A \tag{B.22}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A \cos \theta_A \tag{B.23}$$

$$\beta_4 = \frac{1}{24} \eta_1^4 (3 \kappa_A^3 + \ddot{\kappa}_A) \cos \theta_A \tag{B.24}$$

$$\beta_5 = \frac{19}{120} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A \cos \theta_A \tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}
\beta_6 = & 462 (y_B - y_A) - 252 \eta_1 \sin \theta_A - 210 \eta_2 \sin \theta_B - \\
& - \left( 63 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{21}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{20} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + \frac{28}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{7}{8} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\
& + \left( 42 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{7}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{120} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{14}{3} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{7}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B
\end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
\beta_7 = & -1980 (y_B - y_A) + 1050 \eta_1 \sin \theta_A + 930 \eta_2 \sin \theta_B + \\
& + \left( 252 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{35}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{8} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + 35 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{35}{12} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( 192 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{17}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{24} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - 22 \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{17}{12} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B
\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}
\beta_8 = & 3465 (y_B - y_A) - 1800 \eta_1 \sin \theta_A - 1665 \eta_2 \sin \theta_B - \\
& - \left( 420 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{105}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{6} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + 56 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{35}{8} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\
& + \left( \frac{705}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{33}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{12} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{83}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{11}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
\beta_9 = & -3080 (y_B - y_A) + 1575 \eta_1 \sin \theta_A + 1505 \eta_2 \sin \theta_B + \\
& + \left( 360 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{21}{2} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{8} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + \frac{140}{3} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{7}{2} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( 325 \eta_2^2 \kappa_B + 8 \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{12} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{235}{6} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{8}{3} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{10} = & 1386 (y_B - y_A) - 700 \eta_1 \sin \theta_A - 686 \eta_2 \sin \theta_B - \\
& - \left( \frac{315}{2} \eta_1^2 \kappa_A + \frac{35}{8} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{20} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + 20 \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{35}{24} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A + \\
& + \left( \frac{301}{2} \eta_2^2 \kappa_B + \frac{31}{8} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{24} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{37}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{31}{24} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B
\end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11} = & -252 (y_B - y_A) + 126 \eta_1 \sin \theta_A + 126 \eta_2 \sin \theta_B + \\
& + \left( 28 \eta_1^2 \kappa_A + \frac{3}{4} \eta_1^4 \kappa_A^3 + \frac{19}{120} \eta_1^5 \kappa_A^2 \dot{\kappa}_A + \frac{7}{2} \eta_1^3 \dot{\kappa}_A + \frac{1}{4} \eta_1^4 \ddot{\kappa}_A \right) \cos \theta_A - \\
& - \left( 28 \eta_2^2 \kappa_B + \frac{3}{4} \eta_2^4 \kappa_B^3 - \frac{19}{120} \eta_2^5 \kappa_B^2 \dot{\kappa}_B - \frac{7}{2} \eta_2^3 \dot{\kappa}_B + \frac{1}{4} \eta_2^4 \ddot{\kappa}_B \right) \cos \theta_B
\end{aligned} \tag{B.31}$$

# Bibliografia

- [1] Kamal Kant and Steven W. Zucker. Toward efficient trajectory planning: The path-velocity decomposition. *The International Journal of Robotics Research*, 5:72–89, September 1986.
- [2] Corrado Guarino Lo Bianco, Aurelio Piazzì, and Massimo Romano. Smooth motion generation for unicycle mobile robots via dynamic path inversion. *IEEE Transactions on Robotics*, 20(5):884–891, October 2004.
- [3] Gabriele Lini and Aurelio Piazzì. Time optimal dynamic path inversion for an automatic guided vehicle. *IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 5264–5269, 15-17 December 2010.
- [4] Gabriele Lini, Aurelio Piazzì, and Luca Consolini. Optimization of  $\eta^3$ -splines for autonomous parking. *Submitted to IEEE International Conference on Decision and Control*, 12-15 December 2011.
- [5] Jean Levine. *Analysis and control of non-linear systems, a flat-ness based approach*. Springer, 2009.
- [6] Aurelio Piazzì. Introduction to dynamic path inversion. Slides, 2006.
- [7] Aurelio Piazzì, Corrado Guarino Lo Bianco, and Massimo Romano.  $\eta^3$ -splines for the smooth path generation for wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 2007.

- 
- [8] Aurelio Piazzi, Corrado Guarino Lo Bianco, Massimo Bertozzi, Alessandra Fascioli, and Albero Broggi. Quintic  $G^2$  – Splines for the iterative steering of vision-based autonomous vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2002.
  - [9] Albero Broggi, Corrado Guarino Lo Bianco, and Aurelio Piazzi. The ARGO autonomous vehicle’s vision and control systems. *Intelligent Control and Systems*, 1999.
  - [10] Luca Consolini, Mario Tosques, and Aurelio Piazzi. Path following of car-like vehicles using dynamic inversion. *Int. J. Control*, 2003.
  - [11] Corrado Guarino Lo Bianco, Aurelio Piazzi, and Massimo Romano. Smooth control of a wheeled omnidirectional robot. *IFAC 2004 Intelligent Autonomous Vehicles Conference*, 2004.
  - [12] Luca Consolini and Mario Tosques. A path-following problem for a class of non-linear uncertain system. *European Control Conference*, 2003.
  - [13] Aurelio Piazzi, Corrado Guarino Lo Bianco, and Massimo Romano.  $G^3$  – Splines for the path planning of wheeled mobile robots. *European Control Conference*, 2003.