Intelligenza Artificiale

Logiche non classiche

Marco Piastra

Argomenti

1. In che senso non classiche?

2. Logica abduttiva

3. Logiche modali

4. Logiche multivalenti

5. Logiche sfumate

Logiche non classiche?

- Per logica classica si intende:
  - la logica proposizionale
  - la logica predicativa del primo ordine
  - (definite ed utilizzate nel modo descritto nelle precedenti lezioni)
- Direzioni di ampliamento
  - uso della logica classica in un modo diverso, cioè all'interno di un sistema formale costruito per scopi diversi
  - abbandono delle ipotesi di estensionalità o di vero-funzionalità
  - abbandono dell'ipotesi di bivalenza

Logica abduttiva

- Tre forme di inferenza

DEDUTTIVA

j ® y — *SE* i fagioli provengono da questo sacco
j — *ALLORA* i fagioli sono bianchi
———
y — *QUINDI* i fagioli sono bianchi

INDUTTIVA

j — i fagioli provengono da questo sacco
y — i fagioli sono bianchi
———
j ® y — *QUINDI*
SE i fagioli provengono da questo sacco
ALLORA i fagioli sono bianchi

ABDUTTIVA

j ® y — *SE* i fagioli provengono da questo sacco
y — *ALLORA* i fagioli sono bianchi
———
j — i fagioli sono bianchi
QUINDI
i fagioli provengono da questo sacco

Logica abduttiva

- La logica di riferimento è ancora la logica classica
- Il modo di usarla è diverso, infatti:
  - si ha una base di conoscenze espressa da una teoria K (e.g. le cause per cui una macchina non parte)
  - si osservano un determinato numero di fatti, formalizzati in S
  - in generale K ⊭ S
  - quel che si cerca è un completamento G di K e S tale per cui
    K È G ⊨ S
  - intuitivamente, G descrive le *ipotesi* che spiegano l'occorrenza di S

Esempio

- La base di conoscenza K
  - K1: BatteriaScarica ® LuciSpente Ú MotorinoNonGira
  - K2: MotorinoGuasto ® MotorinoNonGira
  - K3: MotorinoNonGira ® MacchinaNonParte
  - K4: NienteBenzina ® IndicatoreAZero Ú MacchinaNonParte
- I fatti S
  - MacchinaNonParte
- Possibili completamenti (*ipotesi*) G
  - BatteriaScarica
  - MotorinoGuasto
  - NienteBenzina

Logiche Non Classiche (7)

Backward chaining

- In un certo senso, è il procedimento inverso di una *dimostrazione*
- Si parte dalle *conseguenze* e si investigano le *premesse* e le eventuali altre *conseguenze*
- Esempio:
  - Il fatto MacchinaNonParte interessa le tre le regole K1, K3, K4
  - tuttavia la K1 implica anche LuciSpente
  - la K4 implica anche IndicatoreAZero
  - (il sistema, in generale, promuove un accertamento)
  - la K3 invece è immediatamente percorribile all'indietro
- Tuttavia:
  - rispetto alla logica classica, si hanno delle implicazioni di mera *possibilità*
  - Carburatore Ingolfato
    OdoreBenzina MacchinaNonParte

Marco Piastra

Logiche Non Classiche (8)

Logica modale

- In logica proposizionale (classica)
  - la formula $(j \rightarrow y) \vee (y \rightarrow j)$ è una tautologia
  - il significato informale di tale tautologia è abbastanza sconcertante
  - (si pensi di attribuire a $\rightarrow$ il significato di 'causa')
- Origini della logica modale
  - la ricerca una forma di implicazione 'alternativa' o meglio 'complementare' rispetto alla implicazione materiale (i.e. l'implicazione classica)
  - che esprima una relazione più 'specifica', per cui non vale la tautologia di cui sopra
  - in simboli, tale implicazione si scrive:
    $\Box(j \rightarrow y)$
  - storicamente, si chiama *implicazione stretta*

Marco Piastra

Logiche Non Classiche (9)

Assiomatizzazione

- Logica modale normale
  K: $\Box(j \rightarrow y) \rightarrow (\Box j \rightarrow \Box y)$
- Altri assiomi:
  D: $\Box j \rightarrow \Diamond j$
  T: $\Box j \rightarrow j$
  4: $\Box j \rightarrow \Box\Box j$
  5: $\Diamond j \rightarrow \Box\Diamond j$
  + tutti gli assiomi del calcolo proposizionale
- Regole di inferenza
  - MP
  - Necessitazione
    $\dfrac{j}{\Box j}$
- Modalità derivata
  $\Diamond j \equiv \neg\Box\neg j$

Marco Piastra

Logiche Non Classiche (10)

Letture informali

- Possibilità e necessità (soggettive)
  - $\Box j$ si legge come 'in ogni caso possibile j'
  - $\Diamond j$ si legge come 'è possibile che j'

  D: $\Box j \rightarrow \Diamond j$
  T: $\Box j \rightarrow j$
  4: $\Box j \rightarrow \Box\Box j$
  5: $\Diamond j \rightarrow \Box\Diamond j$
- Logica epistemica
  - $\Box j$ si legge come 'io so che j'
  - j (non modale) si legge come 'j è oggettivamente vero'
  - allora la logica KT45 = KT5 è la logica della conoscenza infallibile
  - infatti T: $\Box j \rightarrow j$
  - la logica KD45 è invece la logica della conoscenza falsificabile
  - infatti D: $\Box j \rightarrow \Diamond j$

Marco Piastra

Logiche Non Classiche (11)

Semantica dei mondi possibili

- Agli inizi
  - la logica modale è stata sviluppata come puro sistema formale, privo di una semantica rigorosa
- Strutture di riferimento
  - dato un linguaggio logico L formato dal linguaggio proposizionale con aggiunta dei simboli $\Box$ e $\Diamond$
  - una struttura S di mondi possibili è una tupla $\langle W, R, r \rangle$ dove:
    - » W è un insieme di punti detti anche 'stati' o 'mondi possibili'
    - » R è una relazione binaria su W^2 che definisce l'accessibilità tra mondi
    - » r è una funzione che assegna un valore di verità alle lettere proposizionali di L in ogni mondo $w \in W$

In somma, una struttura di assegnazioni in senso proposizionale

Marco Piastra

Logiche Non Classiche (12)

Semantica dei mondi possibili (2)

- Regole semantiche
  - si dice che S soddisfa una formula non modale j in un mondo $w \in W$, cioè che $S,w \Vdash j$ sse j è vera in w
  - regole modali:
    $S,w \Vdash \Box j$ sse $\forall w' \in W, wRw', S,w' \Vdash j$
    $S,w \Vdash \Diamond j$ sse $\exists w' \in W, wRw', S,w' \Vdash j$
- Corrispondenza
  - si può dimostrare che in generale gli assiomi modali corrispondono a proprietà di R
    T: $\Box j \rightarrow j$ $\Leftrightarrow$ *riflessività*
    5: $\Diamond j \rightarrow \Box\Diamond j$ $\Leftrightarrow$ *simmetria*
    4: $\Box j \rightarrow \Box\Box j$ $\Leftrightarrow$ *transitività*
  - quindi la logica KT5 corrisponde alla classe di strutture dove R è una relazione di equivalenza
  - non tutte le proprietà di R corrispondono ad un assioma modale: e.g. *irriflessività*

Marco Piastra

Logiche Non Classiche (13)

Logiche modali

- In generale, le logiche modali
  - sono caratterizzate dalla scelta di un particolare insieme di assiomi (e.g. KT5, KD45) a seconda del tipo di nozione informale (o di struttura dei mondi possibili) si vuole rappresentare
  - sono complete rispetto alla corrispondente classe di strutture
  - sono *decidibili*
- Tuttavia
  - non sono *vero-funzionali*, ovvero non esiste la possibilità di creare le tavole di verità con un numero finito di valori
  - non sono puramente *estensionali*, in quanto il valore di verità dipende anche da un 'mondo possibile' o contesto

Matteo Pistore

Logiche Non Classiche (14)

Logiche multivalenti

- Origini storiche
  - il fatto che le logiche modali non siano vero-funzionali è stato dimostrato qualche tempo dopo la loro comparsa
  - agli inizi, alcuni logici formularono la congettura che le logiche modali potessero essere rese vero-funzionali ammettendo un insieme di valori di verità contenente più di due valori (Lukasiewicz)
  - malgrado le origini comuni, le due linee di (logiche modali, logiche multivalenti) ricerca si sono in seguito evolute lungo direzioni diverse
- Idea intuitiva
  - una logica a due soli valori rappresenta una sorta di certezza implicita riguardo alla *conoscibilità* del valore di verità
  - la presenza di ulteriori valori permette di rappresentare meglio situazioni di *incertezza* e/o di *ambiguità*

Matteo Pistore

Logiche Non Classiche (15)

Logiche trivalenti

- Lukasiewicz

∧	0	U	1
0	0	0	0
U	0	U	U
1	0	U	1

∨	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	1
1	1	1	1

∨	0	U	1
0	1	1	1
U	1	U	1
1	0	U	1

¬	
0	1
U	U
1	0

- Bóchvar

∧	0	U	1
0	0	0	0
U	0	U	U
1	0	U	1

∨	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	U
1	1	U	1

∨	0	U	1
0	1	U	1
T	U	U	U
1	0	U	1

¬	
0	1
U	U
1	0

Matteo Pistore

Logiche Non Classiche (16)

Logica a valori infiniti

- Lukasiewicz
  - definisce una famiglia di logiche che comprende sia la logica trivalente che la logica a valori infiniti compresi in [0, 1]
  - le regole algebriche di tale famiglia sono:

    $|0x| = 1 - |x|$

    $|x \oplus y| = 1 - |x| + |y|$

    $|x \odot y| = \min(|x|, |y|)$

    $|x \oplus y| = \max(|x|, |y|)$

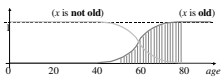
    $|x \leftrightarrow y| = \min(1 - |x| + |y|, 1 - |y| + |x|)$
- Osservazioni
  - in questa logica $x \odot 0x$ non è una tautologia né $x \odot 0x$ è una contraddizione
  - in compenso, $(x \oplus y) \odot (y \oplus x)$ rimane una tautologia
  - i valori in [0, 1] non possono essere probabilità: una logica probabilistica non può essere vero-funzionale

Matteo Pistore

Logiche Non Classiche (17)

Logiche sfumate

- Logica multivalente?
  - talvolta le logiche sfumate vengono confuse con le logiche multivalenti
  - in realtà le logiche sfumate sono molto meno 'classiche'
- Insiemi sfumati
  - dato un universo del discorso U
  - un sottoinsieme di U può essere descritto da una funzione caratteristica $c : U \to \{0, 1\}$
  - l'idea di base degli insiemi sfumati è quella di accettare anche valori intermedi, cioè che $c : U \to [0, 1]$
  - in questo modo si vogliono rappresentare in modo 'più efficace' i termini linguistici che presentano un 'effetto borderline'



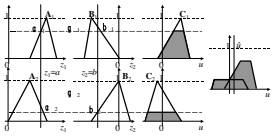
Matteo Pistore

Logiche Non Classiche (18)

Inferenza sfumata

- Presupposti
  - alle 'formule' del linguaggio (non definito in modo rigoroso) vengono fatti corrispondere insiemi sfumati ed operatori insiemistici appropriati
  - l'inferenza consiste in un calcolo algebrico 'semantico' sugli insiemi sfumati
  - le 'conseguenze logiche' possono ma non necessariamente devono essere tradotte in un linguaggio
- Osservazioni
  - la parentela con i concetti della logica classica è assai remota
  - come per le logiche multivalenti, i presupposti fondamentali sono incompatibili con la probabilità
  - infatti, un insieme sfumato non è una distribuzione di probabilità (e.g. non è normalizzato a 1)

Matteo Pistore

Esempio

- Tecnica di Mamdani (controlli automatici)
  - le regole sono del tipo:
    if (z_1 is $\mathbf{A}_k$) **and** (z_2 is $\mathbf{B}_k$) **then** (u is $\mathbf{C}_k$)
  - in un controllore sfumato, si assume la presenza di una base di regole combinate tramite ∪
  - la tecnica di calcolo può essere descritta come segue: