Intelligenza Artificiale

Logiche non classiche

Marco Piastra

Argomenti

1. In che senso non classiche?

2. Logica abduttiva

3. Logiche modali

4. Logiche multivalenti

5. Logiche sfumate

Logiche non classiche?

- Per logica classica si intende:
  - la logica proposizionale
  - la logica predicativa del primo ordine
  - (definite ed utilizzate nel modo descritto nelle precedenti lezioni)
- Direzioni di ampliamento
  - uso della logica classica in un modo diverso, cioè all'interno di un sistema formale costruito per scopi diversi
  - abbandono delle ipotesi di estensionalità o di vero-funzionalità
  - abbandono dell'ipotesi di bivalenza

Logica abduttiva

- Tre forme di inferenza

DEDUTTIVA

$\varphi \to \psi$
φ

ψ

SE i fagioli provengono da questo sacco
ALLORA i fagioli sono bianchi
I fagioli provengono da questo sacco
QUINDI i fagioli sono bianchi

INDUTTIVA

φ
ψ

$\varphi \to \psi$

I fagioli provengono da questo sacco
I fagioli sono bianchi
QUINDI
SE i fagioli provengono da questo sacco
ALLORA i fagioli sono bianchi

ABDUTTIVA

$\varphi \to \psi$
ψ

φ

SE i fagioli provengono da questo sacco
ALLORA i fagioli sono bianchi
I fagioli sono bianchi
QUINDI
i fagioli provengono da questo sacco

Logica abduttiva

- La logica di riferimento è ancora la logica classica
- Il modo di usarla è diverso, infatti:
  - si ha una base di conoscenze espressa da una teoria K (e.g. le cause per cui una macchina non parte)
  - si osservano un determinato numero di fatti, formalizzati in Σ
  - in generale $K \not\vdash \Sigma$
  - quel che si cerca è un completamento Γ di K e Σ tale per cui
    $K \cup \Gamma \vdash \Sigma$
  - intuitivamente, Γ descrive le *ipotesi* che spiegano l'occorrenza di Σ

Esempio

- La base di conoscenza K

  K1: BatteriaScarica $\rightarrow$ LuciSpente $\wedge$ MotorinoNonGira

  K2: MotorinoGuasto $\rightarrow$ MotorinoNonGira

  K3: MotorinoNonGira $\rightarrow$ MacchinaNonParte

  K4: NienteBenzina $\rightarrow$ IndicatoreAZero $\wedge$ MacchinaNonParte

- I fatti Σ

  MacchinaNonParte

- Possibili completamenti (*ipotesi*) Γ
  - BatteriaScarica
  - MotorinoGuasto
  - NienteBenzina

Backward chaining

- In un certo senso, è il procedimento inverso di una *dimostrazione*
- Si parte dalle *conseguenze* e si investigano le *premesse* e le eventuali altre *conseguenze*
- Esempio:
  - Il fatto MacchinaNonParte interessa le tre le regole K1, K3, K4
  - tuttavia la K1 implica anche LuciSpente
  - la K4 implica anche IndicatoreAZero
  - (il sistema, in generale, promuove un accertamento)
  - la K3 invece è immediatamente percorribile all'indietro
- Tuttavia:
  - rispetto alla logica classica, si hanno delle implicazioni di mera *possibilità*
  - CarburatoreIngolfato $\rightarrow$ $\Diamond$ OdoreBenzina $\wedge$ MacchinaNonParte

Logica modale

- In logica proposizionale (classica)
  - la formula $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$ è una tautologia
  - il significato informale di tale tautologia è abbastanza sconcertante
  - (si pensi di attribuire a $\rightarrow$ il significato di 'causa')
- Origini della logica modale
  - la ricerca una forma di implicazione 'alternativa' o meglio 'complementare' rispetto alla implicazione materiale (i.e. l'implicazione classica)
  - che esprima una relazione più 'specifica', per cui non vale la tautologia di cui sopra
  - in simboli, tale implicazione si scrive: $\Box (\varphi \rightarrow \psi)$
  - storicamente, si chiama *implicazione stretta*

Assiomatizzazione

- Logica modale normale
  K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

- Altri assiomi:
  D: $\Box\varphi \rightarrow \neg\Box\neg\varphi$
  T: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
  4: $\Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$
  5: $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$
  + tutti gli assiomi del calcolo proposizionale

- Regole di inferenza
  – MP
  – Necessitazione

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}$$

- Modalità derivata
  $\neg\Box\neg\varphi = \Diamond\varphi$

Letture informali

- Possibilità e necessità (soggettive)
  - $\Box \varphi$ si legge come 'in ogni caso possibile φ'
  - $\Diamond \varphi$ si legge come 'è possibile che φ'

  D: $\Box \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$

  T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$

  4: $\Box\Box \varphi \rightarrow \Box \varphi$

  5: $\Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$

- Logica epistemica
  - $\Box \varphi$ si legge come 'io so che φ'
  - φ (non modale) si legge come 'φ è oggettivamente vero'
  - allora la logica KT45 = KT5 è la logica della conoscenza infallibile
  - infatti T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$
  - la logica KD45 è invece la logica della conoscenza falsificabile
  - infatti D: $\Box \varphi \rightarrow \neg \Box \neg \varphi$

Semantica dei mondi possibili

- Agli inizi
  - la logica modale è stata sviluppata come puro sistema formale, privo di una semantica rigorosa
- Strutture di riferimento
  - dato un linguaggio logico $\mathscr{L}$ formato dal linguaggio proposizionale con aggiunta dei simboli $\Box$ e $\Diamond$
  - una struttura S di mondi possibili è una tupla $\langle W, R, v \rangle$ dove:
    - » W è un insieme di punti detti anche 'stati' o 'mondi possibili'
    - » R è una relazione binaria su W^2 che definisce l'accessibilità tra mondi
    - » v è una funzione che assegna un valore di verità alle lettere proposizionali di $\mathscr{L}$ in ogni mondo $w \in W$

Insomma, una struttura di assegnazioni in senso proposizionale

Semantica dei mondi possibili (2)

- Regole semantiche
  - si dice che S soddisfa una formula non modale φ in un mondo w $\in$ W, cioè che S,w $\models \varphi$ sse φ è vera in w
  - regole modali:

    S,w $\models \Box \varphi$ sse $\forall w' \in W$, wRw′, S,w′ $\models \varphi$

    S,w $\models \Diamond \varphi$ sse $\exists w' \in W$, wRw′, S,w′ $\models \varphi$

- Corrispondenza
  - si può dimostrare che in generale gli assiomi modali corrispondono a proprietà di R

    T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$ $\Leftrightarrow$ *riflessività*

    5: $\Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ $\Leftrightarrow$ *simmetria*

    4: $\Box\Box \varphi \rightarrow \Box \varphi$ $\Leftrightarrow$ *transitività*
  - quindi la logica KT5 corrisponde alla classe di strutture dove R è una relazione di equivalenza
  - non tutte le proprietà di R corrispondono ad un assioma modale: e.g. *irriflessività*

Logiche modali

- In generale, le logiche modali
  - sono caratterizzate dalla scelta di un particolare insieme di assiomi (e.g. KT5, KD45) a seconda del tipo di nozione informale (o di struttura dei mondi possibili) si vuole rappresentare
  - sono complete rispetto alla corrispondente classe di strutture
  - sono *decidibili*
- Tuttavia
  - non sono *vero-funzionali*, ovvero non esiste la possibilità di creare le tavole di verità con un numero finito di valori
  - non sono puramente *estensionali*, in quanto il valore di verità dipende anche da un 'mondo possibile' o contesto

Logiche multivalenti

- Origini storiche
  - il fatto che le logiche modali non siano vero-funzionali è stato dimostrato qualche tempo dopo la loro comparsa
  - agli inizi, alcuni logici formularono la congettura che le logiche modali potessero essere rese vero-funzionali ammettendo un insieme di valori di verità contenente più di due valori (Lukasiewicz)
  - malgrado le origini comuni, le due linee di (logiche modali, logiche multivalenti) ricerca si sono in seguito evolute lungo direzioni diverse

- Idea intuitiva
  - una logica a due soli valori rappresenta una sorta di certezza implicita riguardo alla *conoscibilità* del valore di verità
  - la presenza di ulteriori valori permette di rappresentare meglio situazioni di *incertezza* e/o di *ambiguità*

Logiche trivalenti

- Lukasiewicz

$\wedge$	0	U	1
0	0	0	0
U	0	U	U
1	0	U	1

$\vee$	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	1
1	1	1	1

$\rightarrow$	0	U	1
0	1	1	1
U	1	U	1
1	0	U	1

$\neg$	
0	1
U	U
1	0

- Bóchvar

$\wedge$	0	U	1
0	0	U	0
U	U	U	U
1	0	U	1

$\vee$	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	U
1	1	U	1

$\rightarrow$	0	U	1
0	1	U	1
I	U	U	U
1	0	U	1

$\neg$	
0	1
U	U
1	0

Logica a valori infiniti

- Lukasiewicz
  - definisce una famiglia di logiche che comprende sia la logica trivalente che la logica a valori infiniti compresi in [0, 1]
  - le regole algebriche di tale famiglia sono:

$$|\neg\varphi| = 1 - |\varphi|$$

$$|\varphi \rightarrow \psi| = 1 - |\varphi| + |\psi|$$

$$|\varphi \wedge \psi| = \min(|\varphi|, |\psi|)$$

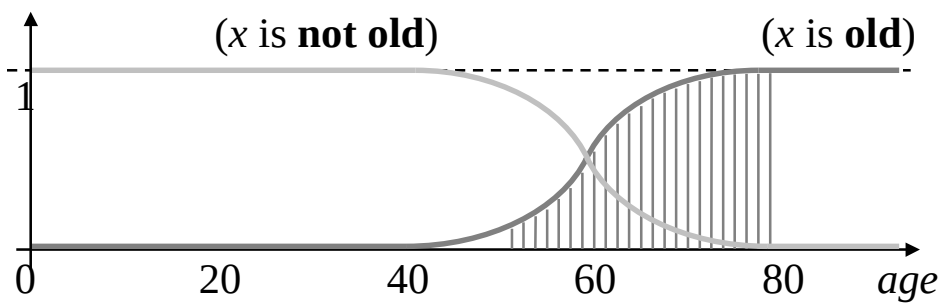
$$|\varphi \vee \psi| = \max(|\varphi|, |\psi|)$$

$$|\varphi \leftrightarrow \psi| = \min(1 - |\varphi| + |\psi|, 1 - |\psi| + |\varphi|)$$

- Osservazioni
  - in questa logica $\varphi \vee \neg\varphi$ non è una tautologia né $\varphi \wedge \neg\varphi$ è una contraddizione
  - in compenso, $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$ rimane una tautologia
  - i valori in [0, 1] non possono essere probabilità: una logica probabilistica non può essere vero-funzionale

Logiche sfumate

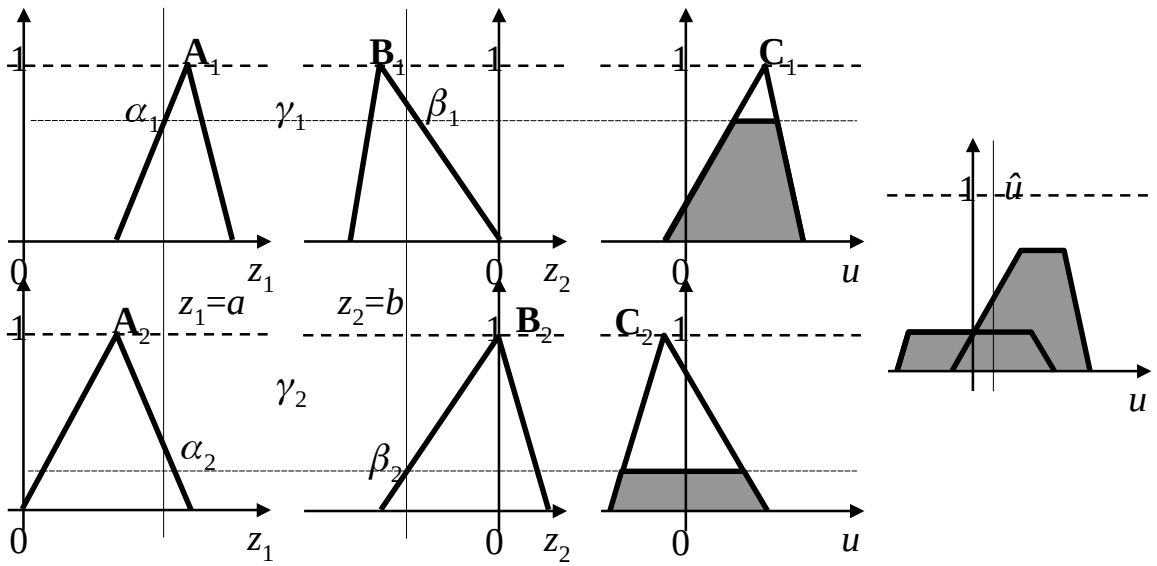
- Logica multivalente?
  - talvolta le logiche sfumate vengono confuse con le logiche multivalenti
  - in realtà le logiche sfumate sono molto meno 'classiche'
- Insiemi sfumati
  - dato un universo del discorso U
  - un sottoinsieme di U può essere descritto da una funzione caratteristica $\chi : U \rightarrow \{0, 1\}$
  - l'idea di base degli insiemi sfumati è quella di accettare anche valori intermedi, cioè che $\chi : U \rightarrow [0, 1]$
  - in questo modo si vogliono rappresentare in modo 'più efficace' i termini linguistici che presentano un 'effetto borderline'



Inferenza sfumata

- Presupposti
  - alle 'formule' del linguaggio (non definito in modo rigoroso) vengono fatti corrispondere insiemi sfumati ed operatori insiemistici appropriati
  - l'inferenza consiste in un calcolo algebrico 'semantico' sugli insiemi sfumati
  - le 'conseguenze logiche' possono ma non necessariamente devono essere tradotte in un linguaggio
- Osservazioni
  - la parentela con i concetti della logica classica è assai remota
  - come per le logiche multivalenti, i presupposti fondamentali sono incompatibili con la probabilità
  - infatti, un insieme sfumato non è una distribuzione di probabilità (e.g. non è normalizzato a 1)

Esempio

- Tecnica di Mamdani (controlli automatici)
  - le regole sono del tipo:

    if (z_1 is $\mathbf{A}_k$) **and** (z_2 is $\mathbf{B}_k$) **then** (u is $\mathbf{C}_k$)
  - in un controllore sfumato, si assume la presenza di una base di regole combinate tramite $\vee$
  - la tecnica di calcolo può essere descritta come segue: