Intelligenza Artificiale

Logica
predicativa
(del primo ordine)

Marco Piastra

Argomenti

1. Idee di base

2. Linguaggio dei predicati

3. Sistema formale (assiomatico)

4. Teoria dei modelli

5. Esempi e limitazioni

Logica predicativa

- La logica proposizionale ha molte interessanti proprietà:
  - è *completa*
  - qualunque *tautologia* è derivabile
  - è *decidibile*
- Il difetto principale sta nella *semplicità* del linguaggio:
  - solo concetti elementari sono esprimibili
  - solo processi di ragionamento relativamente ovvi possono essere studiati
- La logica dei predicati si basa su un linguaggio molto più ricco:
  - struttura più complessa
  - esprimibilità di concetti non intuitivi (e.g. ad estensione infinita)
  - rappresentazione di processi di ragionamento estremamente sofisticati

In sintesi, lo studio della logica è in larga misura lo studio della logica dei predicati

Sintassi

- Si considerino schemi del tipo:
  - *OGNI* mercoledì feriale si tiene il mercato in piazza.
    OGGI è mercoledì,
    QUINDI OGGI c'è mercato in piazza.
  - *AFFERMO* " x ((Mer(x) Ù Fer(x)) ® Mrct(x))
    AFFERMO (Mer(Oggi) Ù Fer(Oggi))
    QUINDI Mrct(Oggi)
  - *OGNI* essere umano è mortale.
    SOCRATE è un essere umano,
    QUINDI SOCRATE è mortale.
  - *AFFERMO* " x (Umano(x) ® Mortale(x))
    AFFERMO Umano(Socrate)
    QUINDI Mortale(Socrate)

Per la formalizzazione, mi servono *predicati*, *variabili*, *costanti* e *quantificatori*...

Semantica

- Intuitivamente:
  - si considera un 'mondo di oggetti' preso come riferimento
  - esempio: l'insieme di tutti gli individui, l'insieme dei giorni dell'anno, etc.
  - tale insieme viene anche detto *universo del discorso*
- Predicati come insiemi
  - si rammenti che la formalizzazione ha come obiettivo la estromissione degli aspetti *intensionali* a beneficio di quelli *estensionali*
  - se di un concetto come 'Mercoledì' si toglie la descrizione astratta (e.g. 'il terzo giorno di ogni settimana') ...
  - ... resta solo l'*insieme* dei giorni che possiedono la proprietà di essere Mercoledì
- Variabili e costanti
  - le variabili rappresentano oggetti qualsiasi
  - le costanti rappresentano oggetti specifici (e.g. 'Socrate')

Sintassi formale

- Un linguaggio predicativo comprende:
  - un insieme di *simboli predicativi*, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - » esempio: $P(x)$, $G(x, y)$, $Q(x, y, z)$, etc.
    - » eccezione: '=' (e.g. $x = y$)
  - un insieme di *simboli funzionali*, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - » esempio: $f(x)$, $g(x, y)$, $h(x, y, z)$, etc.
  - un insieme di *variabili*
    - » esempio: x, y, z, ...
  - un insieme di *costanti individuali*
    - » esempio: a, b, c, ...
  - i *connettivi* primari Ø , ® e derivati Ù , Ú , «
  - il *quantificatore universale* " ed il *quantificatore esistenziale* $
  - le due parentesi (e)

Logica Predicativa (7)

Regole di buona formazione

- Termini
  - ogni variabile singola è un *termine*
  - ogni costante singola è un *termine*
  - se f è un simbolo funzionale a n argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono *termini*, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un *termine*
    - » esempi: x, a, $f(y)$, g(b, c)
- Formula atomica
  - se P è un simbolo predicativo a n argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $P(t_1, \ldots, t_n)$ è una *formula atomica*
    - » esempi: $P(x)$, $Q(y, a)$, R(b, c)
- Formule (fbf)
  - ogni formula atomica è una formula
  - se φ è una formula, allora $(\neg \varphi)$ è una formula
  - se φ e ψ sono formule, allora anche $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sono formule
  - se φ è una formula, allora anche $(\forall x \varphi)$ e $(\exists x \varphi)$ sono formule

Mirko Maratea

Logica Predicativa (8)

Definizioni di base

- L'insieme Fbf(L):
  - dato un linguaggio predicativo L, è l'insieme delle formule costruite in base alle regole precedenti

Nota: si dice del primo ordine un linguaggio predicativo in cui i quantificatori si applicano solo alle variabili e non ai predicati e/o alle funzioni

- Variabili libere e vincolate
  - si dice vincolata (in una fbf) una variabile che occorre nel raggio di azione di un quantificatore, libera se non è vincolata da alcun quantificatore
    - » esempi: $\forall x P(x)$, $P(x)$
- Formule aperte e chiuse
  - si dice *aperta* una formula in cui occorre almeno una variabile libera, si dice *chiusa* o anche *enunciato* in caso contrario

Nota: solo le formule *chiuse* hanno un valore di verità ...

Mirko Maratea

Logica Predicativa (9)

Definizioni di base (2)

- Sostituzione in un termine:
  - siano t e u due termini e x una variabile
  - l'espressione $u[x/t]$ indica la sostituzione di x con t in u, in base alle seguenti regole:
    - » se u è una costante, allora $u[x/t] = u$
    - » se u è una variabile, allora se $u = x$ si ha $u[x/t] = u$, altrimenti $u[x/t] = t$
    - » se u è della forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, allora $u[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
- Sostituzione in una formula:
  - sia φ una fbf, t un termine e x una variabile
  - l'espressione $\varphi[x/t]$ indica la sostituzione di x con t in φ, in base alle seguenti regole:
    - » se φ è della forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, allora $\varphi[x/t] = P(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
    - » se φ è $\neg\psi$, allora $\varphi[x/t] = \neg\psi[x/t]$
    - » se φ è $\psi \vee \chi$, allora $\varphi[x/t] = \psi[x/t] \vee \chi[x/t]$
    - » se φ è $\forall y \psi$, allora se $x = y$ allora $\varphi[x/t] = \varphi$ altrimenti $\varphi[x/t] = \forall y \psi[x/t]$

Mirko Maratea

Logica Predicativa (10)

Sistema assiomatico (Hilbertiano) per Lpo

- Sei schemi di assioma:

Come per Lp:

Ax1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Ax2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

Ax3 $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Ax4 $\forall x \varphi \rightarrow \varphi[x/t]$
se t è sostituibile per x in φ

Ax5 $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$

Ax6 $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$
se x non occorre libera in φ

- Le lettere φ, ψ e χ indicano una fbf qualsiasi
- Ogni sostituzione di φ, ψ e χ è un assioma

- Più due se si ammette il simbolo di identità:

Ax7 $t = t$

Ax8 $t = u \rightarrow (\varphi[x/t] \leftrightarrow \varphi[x/u])$

- Regole di inferenza: MP

Mirko Maratea

Logica Predicativa (11)

Proprietà del sistema

- Teorema di deduzione
  $S \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ se $S \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$
- Generalizzazione
  $S \vdash \varphi$ se $S \vdash \forall x \varphi$
  se x non occorre libera in alcuna fbf di S
  - altrimenti l'applicazione del teorema di deduzione provoca effetti strani:
    $A(x) \vdash \forall x A(x)$ e $\vdash A(x) \rightarrow \forall x A(x)$
- Inclusione della logica proposizionale
  - se consideriamo Fbf(L) come delle proposizioni ...
  - ... allora tutte le tautologie proposizionali sono derivabili dai soli schemi Ax1, Ax2 e Ax3
- Riguardo all'identità:
  - $\vdash t = u \rightarrow u = t$ (simmetria)
  - $\vdash t = u \rightarrow (u = w \rightarrow t = w)$ (transitività)

La riflessività è stata assunta come assioma

Mirko Maratea

Logica Predicativa (12)

Semantica di Lpo

- Struttura per un linguaggio
  - dato un linguaggio predicativo L, una *struttura* per L è una tupla
    $< U, I >$
    dove:
    - » U è un insieme di oggetti (*universo del discorso*)
    - » I è una funzione di *interpretazione*
  - la funzione I è tale per cui:
    - » per ogni un simbolo predicativo a n argomenti P, $I(P)$ è una relazione a n argomenti definita su U, indicata anche come P^U
    - » per ogni un simbolo funzionale a n argomenti f, $I(f)$ è una funzione da U^n a U, indicata anche come f^U
    - » per ogni costante individuale c, $I(c)$ è un elemento di U, indicato anche come c^U

Mirko Maratea

Logica Predicativa (13)

Semantica di Lpo (2)

- Assegnazione
  - data S, una *struttura* per $\mathcal{L}$, un'assegnazione ν è una funzione che associa ad ogni variabile in $\mathcal{L}$ un elemento di U
  - la funzione $\nu^{\mathcal{O}}$ è l'estensione di ν ai *termini* ottenuta come segue:
    - » $\nu^{\mathcal{O}}$ coincide con ν per le variabili
    - » per ogni costante individuale, $\nu^{\mathcal{O}}$ coincide con l'interpretazione i
    - » per ogni simbolo funzionale a n argomenti f, si ha: $\nu^{\mathcal{O}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{U}}(\nu^{\mathcal{O}}(t_1), \ldots, \nu^{\mathcal{O}}(t_n))$

Marco Piastra

Logica Predicativa (14)

Semantica di Lpo (3)

- Soddisfacimento
  - data S, una *struttura* per $\mathcal{L}$, ed una assegnazione $\nu^{\mathcal{O}}$, si dice che S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \varphi$ se valgono le seguenti condizioni:
    - » se φ è $t_1 = t_2$, sse $\nu^{\mathcal{O}}(t_1) = \nu^{\mathcal{O}}(t_2)$
    - » se φ è $P(t_1, \ldots, t_n)$, sse $\langle \nu^{\mathcal{O}}(t_1), \ldots, \nu^{\mathcal{O}}(t_n) \rangle$ è in $P^{\mathcal{U}}$
    - » se φ è $\neg\psi$, sse S, $\nu^{\mathcal{O}} \not\models \psi$
    - » se φ è $\psi \rightarrow \chi$, sse nel caso in cui S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \psi$ si ha anche S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \chi$
    - » se φ è $\forall x \psi$, sse per ogni $d \in U$, S, $\nu^{\mathcal{O}}[x/d] \models \psi$, dove $\nu^{\mathcal{O}}[x/d]$ è l'assegnazione $\nu^{\mathcal{O}}$ ad eccezione della sostituzione di d ad x

Notare che la nozione di soddisfacimento è definita sia per gli *enunciati* che per le formule *aperte*

Marco Piastra

Logica Predicativa (15)

Conseguenza in Lpo

- Soddisfacimento degli enunciati
  - dato un enunciato φ, le due affermazioni che seguono sono equivalenti:
    - » esiste almeno una assegnazione $\nu^{\mathcal{O}}$ tale per cui S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \varphi$
    - » per qualsiasi assegnazione $\nu^{\mathcal{O}}$ si ha S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \varphi$
- Conseguenza logica
  - dato un insieme di fbf Σ ed una fbf φ, si ha che: $\Sigma \models \varphi$ sse per qualsiasi struttura S ed assegnazione $\nu^{\mathcal{O}}$ si ha che: S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \Sigma \Rightarrow$ S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \varphi$
  - due fbf φ e ψ sono logicamente equivalenti sse $\{\varphi\} \models \psi$ e $\{\psi\} \models \varphi$
  - una fbf è φ logicamente valida sse $\models \varphi$

Marco Piastra

Logica Predicativa (16)

Modelli

- Definizione
  - un enunciato φ viene detto *vero* in una struttura S sse esiste un'assegnazione $\nu^{\mathcal{O}}$ tale per cui S, $\nu^{\mathcal{O}} \models \varphi$
  - una struttura S tale da rendere *vero* un enunciato φ è detta *modello* di φ e si scrive $S \models \varphi$
  - una struttura S è detta *modello* di un insieme di *enunciati* Σ sse rende veri tutti gli enunciati in Σ. In simboli $S \models \Sigma$
- Osservazioni
  - dato un enunciato φ ed una struttura S si ha che $S \models \varphi$ oppure $S \models \neg\varphi$, nel qual caso si ha $S \not\models \varphi$
  - dato un insieme di enunciati Σ, può accadere che non esistano modelli di Σ. In tal caso, Σ si dice incoerente
  - Un insieme di enunciati Σ si dice una *teoria*

Marco Piastra

Logica Predicativa (17)

Sintassi e semantica

- Validità degli assiomi
  - gli assiomi Ax del sistema assiomatico per Lpo sono logicamente validi
- Correttezza di Lpo
  - si ha che: $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$
- Completezza di Lpo
  - si ha che: $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$

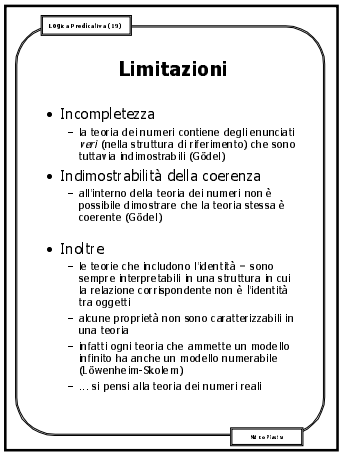
Marco Piastra

Logica Predicativa (18)

Uso di Lpo

- Intuitivamente
  - Lpo è un 'contenitore' astratto dove definire teorie particolari
  - le teorie definiscono classi di modelli che, entro i limiti tecnici, costituiscono le classi di oggetti di cui si parla
- Teoria dei numeri
  - Un solo predicato: $=$
    Due funzioni binarie: $+$ e $\cdot$
    Una sola funzione unaria: $s(\ )$
    Una sola costante individuale: 0
  - Assiomi:
    - S1: $x = y \Rightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$
    - S2: $x = y \Rightarrow (s(x) = s(y))$
    - S3: $\neg(0 = s(x))$
    - S4: $s(x) = s(y) \Rightarrow (x = y)$
    - S5: $x + 0 = x$
    - S6: $x + s(y) = s(x + y)$
    - S7: $x \cdot 0 = 0$
    - S8: $x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$
    - S9: $\varphi(0) \Rightarrow (\forall x (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(s(x))) \Rightarrow \forall x \varphi(x))$

Marco Piastra


Logica Predicativa (19)
Limitazioni
• Incompletezza
– la teoria dei numeri contiene degli enunciati veri (nella struttura di riferimento) che sono tuttavia indimostrabili (Gödel)
• Indimostrabilità della coerenza
– all'interno della teoria dei numeri non è possibile dimostrare che la teoria stessa è coerente (Gödel)
• Inoltre
– le teorie che includono l'identità – sono sempre interpretabili in una struttura in cui la relazione corrispondente non è l'identità tra oggetti
– alcune proprietà non sono caratterizzabili in una teoria
– infatti ogni teoria che ammette un modello infinito ha anche un modello numerabile (Löwenheim-Skolem)
– … si pensi alla teoria dei numeri reali
Mario Piazza