Intelligenza Artificiale

Logica predicativa (del primo ordine)

Marco Piastra

Argomenti

1. Idee di base

2. Linguaggio dei predicati

3. Sistema formale (assiomatico)

4. Teoria dei modelli

5. Esempi e limitazioni

Logica predicativa

- La logica proposizionale ha molte interessanti proprietà:
  - è *completa*
  - qualunque *tautologia* è derivabile
  - è *decidibile*
- Il difetto principale sta nella *semplicità* del linguaggio:
  - solo concetti elementari sono esprimibili
  - solo processi di ragionamento relativamente ovvi possono essere studiati
- La logica dei predicati si basa su un linguaggio molto più ricco:
  - struttura più complessa
  - esprimibilità di concetti non intuitivi (e.g. ad estensione infinita)
  - rappresentazione di processi di ragionamento estremamente sofisticati

In sintesi, lo studio della logica è in larga misura lo studio della logica dei predicati

Sintassi

- Si considerino schemi del tipo:
  - *OGNI* mercoledì feriale si tiene il mercato in piazza.
    OGGI è mercoledì,
    QUINDI OGGI c'è mercato in piazza.
  - *AFFERMO* $\forall x\,((\text{Mer}(x) \wedge \text{Fer}(x)) \rightarrow \text{Mrct}(x))$
    AFFERMO $(\text{Mer}(\text{Oggi}) \wedge \text{Fer}(\text{Oggi}))$
    QUINDI $\text{Mrct}(\text{Oggi})$

  - *OGNI* essere umano è mortale.
    SOCRATE è un essere umano,
    QUINDI SOCRATE è mortale.
  - *AFFERMO* $\forall x\,(\text{Umano}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x))$
    AFFERMO $\text{Umano}(\text{Socrate})$
    QUINDI $\text{Mortale}(\text{Socrate})$

Per la formalizzazione, mi servono *predicati*, *variabili*, *costanti* e *quantificatori* ...

Semantica

- Intuitivamente:
  - si considera un 'mondo di oggetti' preso come riferimento
  - esempio: l'insieme di tutti gli individui, l'insieme dei giorni dell'anno, etc.
  - tale insieme viene anche detto *universo del discorso*
- Predicati come insiemi
  - si rammenti che la formalizzazione ha come obiettivo la estromissione degli aspetti *intensionali* a beneficio di quelli *estensionali*
  - se di un concetto come 'Mercoledì' si toglie la descrizione astratta (e.g. 'il terzo giorno di ogni settimana') ...
  - ... resta solo l'*insieme* dei giorni che possiedono la proprietà di essere Mercoledì
- Variabili e costanti
  - le variabili rappresentano oggetti qualsiasi
  - le costanti rappresentano oggetti specifici (e.g. 'Socrate')

Sintassi formale

- Un linguaggio predicativo comprende:
  - un insieme di *simboli predicativi*, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - » esempio: P(*x*), G(*x*, *y*), Q(*x*, *y*, *z*), etc.
    - » eccezione: '=' (e.g. $x = y$)
  - un insieme di *simboli funzionali*, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - » esempio: *f*(*x*), g(*x*, *y*), h(*x*, *y*, *z*), etc.
  - un insieme di *variabili*
    - » esempio: *x*, *y*, *z*, ...
  - un insieme di *costanti individuali*
    - » esempio: a, b, *c*, ...
  - i *connettivi* primari $\neg$, $\rightarrow$ e derivati $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$
  - il *quantificatore universale* $\forall$ ed il *quantificatore esistenziale* $\exists$
  - le due parentesi (e)

Regole di buona formazione

- Termini
  - ogni variabile singola è un *termine*
  - ogni costante singola è un *termine*
  - se *f* è un simbolo funzionale a *n* argomenti e t_1, ..., t_n sono *termini*, allora *f*(t_1, ..., t_n) è un *termine*
    - » esempi: *x*, a, *f*(*y*), *g*(b, c)
- Formula atomica
  - se P è un simbolo predicativo a *n* argomenti e t_1, ..., t_n sono termini, allora P(t_1, ..., t_n) è una *formula atomica*
    - » esempi: P(*x*), Q(*y*, a), R(b, c)
- Formule (fbf)
  - ogni formula atomica è una formula
  - se φ è una formula, allora $(\neg\varphi)$ è una formula
  - se φ e ψ sono formule, allora anche $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sono formule
  - se φ è una formula, allora anche $(\forall x\, \varphi)$ e $(\exists x\, \varphi)$ sono formule

Definizioni di base

- L'insieme Fbf($\mathscr{L}$):
  - dato un linguaggio predicativo $\mathscr{L}$, è l'insieme delle formule costruite in base alle regole precedenti

Nota: si dice del primo ordine un linguaggio predicativo in cui i quantificatori si applicano solo alle variabili e non ai predicati e/o alle funzioni

- Variabili libere e vincolate
  - si dice vincolata (in una fbf) una variabile che occorre nel raggio di azione di un quantificatore, libera se non è vincolata da alcun quantificatore
    - » esempi: $\forall x\, P(x)$, $P(x)$
- Formule aperte e chiuse
  - si dice *aperta* una formula in cui occorre almeno una variabile libera, si dice *chiusa* o anche *enunciato* in caso contrario

Nota: solo le formule *chiuse* hanno un valore di verità ...

Definizioni di base (2)

- Sostituzione in un termine:
  - siano t e u due termini e x una variabile
  - l'espressione $u[x/t]$ indica la sostituzione di x con t in u, in base alle seguenti regole:
    - » se u è una costante, allora $u[x/t] = u$
    - » se u è una variabile, allora se $u \neq x$ si ha $u[x/t] = u$, altrimenti $u[x/t] = t$
    - » se u è della forma $f(t_1, ..., t_n)$, allora $u[x/t] = f(t_1[x/t], ..., t_n[x/t])$
- Sostituzione in una formula:
  - sia φ una fbf, t un termine e x una variabile
  - l'espressione $\varphi[x/t]$ indica la sostituzione di x con t in φ, in base alle seguenti regole:
    - » se φ è della forma $P(t_1, ..., t_n)$, allora $\varphi[x/t] = P(t_1[x/t], ..., t_n[x/t])$
    - » se φ è $\neg\psi$, allora $\varphi[x/t] = \neg\psi[x/t]$
    - » se φ è $\psi \rightarrow \chi$, allora $\varphi[x/t] = \psi[x/t] \rightarrow \chi[x/t]$
    - » se φ è $\forall y\,\psi$, allora se $x = y$ allora $\varphi[x/t] = \varphi$ altrimenti $\varphi[x/t] = \forall y\,\varphi[x/t]$

Sistema assiomatico (Hilbertiano) per Lpo

- Sei schemi di assioma:

Come per Lp

Ax1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Ax2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

Ax3 $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Ax4 $\forall x \varphi \rightarrow \varphi[x/t]$
se t è sostituibile per x in φ

Ax5 $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$

Ax6 $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$
se x non occorre libera in φ

- Le lettere φ, ψ e χ indicano una fbf qualsiasi
- Ogni sostituzione di φ, ψ e χ è un assioma

- Più due se si ammette il simbolo di identità:

Ax7 $t = t$

Ax8 $t = u \rightarrow (\varphi[x/t] \leftrightarrow \varphi[x/u])$

- Regole di inferenza: MP

Proprietà del sistema

- Teorema di deduzione

  $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$

- Generalizzazione

  $\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \forall x \varphi$

  se x non occorre libera in alcuna fbf di Σ

  – altrimenti l'applicazione del teorema di deduzione provoca effetti strani:

  $A(x) \vdash \forall x A(x) \;\Leftrightarrow\; \vdash A(x) \rightarrow \forall x A(x)$

- Inclusione della logica proposizionale
  - se consideriamo Fbf($\mathscr{L}$) come delle proposizioni ...
  - ... allora tutte le tautologie proposizionali sono derivabili dai soli schemi Ax1, Ax2 e Ax3
- Riguardo all'identità:

  $\vdash t = u \rightarrow u = t$ (simmetria)

  $\vdash t = u \rightarrow (u = w \rightarrow t = w)$ (transitività)

La riflessività è stata assunta come assioma

Semantica di Lpo

- Struttura per un linguaggio
  - dato un linguaggio predicativo $\mathscr{L}$, una *struttura* per $\mathscr{L}$ è una tupla
    <U, *i* >
    dove:
    - » U è un insieme di oggetti (*universo del discorso*)
    - » *i* è una funzione di *interpretazione*
  - la funzione *i* è tale per cui:
    - » per ogni un simbolo predicativo a *n* argomenti P, *i* (P) è una relazione a *n* argomenti definita su U, indicata anche come P^U
    - » per ogni un simbolo funzionale a *n* argomenti *f*, *i* (*f*) è una funzione da U^n *a* U, indicata anche come f^U
    - » per ogni costante individuale c, *i* (c) è un elemento di U, indicato anche come c^U

Semantica di Lpo (2)

- Assegnazione
  - data S, una *struttura* per $\mathscr{L}$, un'assegnazione v è una funzione che associa ad ogni variabile in $\mathscr{L}$ un elemento di U
  - la funzione v' è l'estensione di v ai *termini* ottenuta come segue:
    - » v' coincide con v per le variabili
    - » per ogni costante individuale, v' coincide con l'interpretazione i
    - » per ogni simbolo funzionale a n argomenti f, si ha:
      $v'(f(t_1, ..., t_n)) = f^U(v'(t_1), ..., v'(t_n))$

Semantica di Lpo (3)

- Soddisfacimento
  - data S, una *struttura* per $\mathscr{L}$, ed una assegnazione v', si dice che
    S, $v' \models \varphi$
    se valgono le seguenti condizioni:
    - » se φ è $t = u$, sse $v'(t) = v'(u)$
    - » se φ è $P(t_1, ..., t_n)$, sse $<v'(t_1), ..., v'(t_n)>$ è in P^U
    - » se φ è $\neg\psi$, sse S, $v' \not\models \psi$
    - » se φ è $\psi \rightarrow \chi$, sse nel caso in cui S, $v' \models \psi$ si ha anche S, $v' \models \chi$
    - » se φ è $\forall x\psi$, sse per ogni $d \in U$, S, $v'[x/d] \models \psi$, dove $v'[x/d]$ è l'assegnazione v' ad eccezione della sostituzione di d ad x

Notare che la nozione di soddisfacimento è definita sia per gli *enunciati* che per le formule *aperte*

Conseguenza in Lpo

- Soddisfacimento degli enunciati
  - dato un enunciato φ, le due affermazioni che seguono sono equivalenti:
    - » esiste almeno una assegnazione v' tale per cui S, $v' \models \varphi$
    - » per qualsiasi assegnazione v' si ha S, $v' \models \varphi$
- Conseguenza logica
  - dato un insieme di fbf Σ ed una fbf φ, si ha che:
    $\Sigma \models \varphi$
    sse per qualsiasi struttura S ed assegnazione v' si ha che:
    S, $v' \models \Sigma \quad \Rightarrow \quad$ S, $v' \models \varphi$
  - due fbf φ e ψ sono logicamente equivalenti sse
    $\{\varphi\} \models \psi$ e $\{\psi\} \models \varphi$
  - una fbf è φ logicamente valida sse
    $\models \varphi$

Modelli

- Definizione
  - un enunciato φ viene detto *vero* in una struttura S sse esiste un'assegnazione v' tale per cui S, $v' \models \varphi$
  - una struttura S tale da rendere *vero* un enunciato φ è detta *modello* di φ e si scrive $S \models \varphi$
  - una struttura S è detta *modello* di un insieme di *enunciati* Σ sse rende veri tutti gli enunciati in Σ. In simboli $S \models \Sigma$
- Osservazioni
  - dato un enunciato φ ed una struttura S si ha che $S \models \varphi$ oppure $S \not\models \varphi$, nel qual caso si ha $S \models \neg\varphi$
  - dato un insieme di enunciati Σ, può accadere che non esistano modelli di Σ. In tal caso, Σ si dice incoerente
  - Un insieme di enunciati Σ si dice una *teoria*

Sintassi e semantica

- Validità degli assiomi
  - gli assiomi Ax del sistema assiomatico per Lpo sono logicamente validi
- Correttezza di Lpo
  - si ha che:
    $$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \models \varphi$$
- Completezza di Lpo
  - si ha che:
    $$\Sigma \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \models \varphi$$

Uso di Lpo

- Intuitivamente
  - Lpo è un 'contenitore' astratto dove definire teorie particolari
  - le teorie definiscono classi di modelli che, entro i limiti tecnici, costituiscono le classi di oggetti di cui si parla
- Teoria dei numeri
  - Un solo predicato: =
    Due funzioni binarie: + e ·
    Una sola funzione unaria: s( )
    Una sola costante individuale: 0
  - Assiomi:

S1: $x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z)$

S2: $x = y \rightarrow (\mathrm{s}(x) = \mathrm{s}(y))$

S3: $\neg(0 = \mathrm{s}(x))$

S4: $\mathrm{s}(x) = \mathrm{s}(y) \rightarrow (x = y)$

S5: $x + 0 = x$

S6: $x + \mathrm{s}(y) = \mathrm{s}(x + y)$

S7: $x \cdot 0 = 0$

S8: $x \cdot \mathrm{s}(y) = (x \cdot y) + x$

S9: $\varphi(0) \rightarrow (\forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{s}(x))) \rightarrow \forall x\,\varphi(x))$

Limitazioni

- Incompletezza
  - la teoria dei numeri contiene degli enunciati *veri* (nella struttura di riferimento) che sono tuttavia indimostrabili (Gödel)
- Indimostrabilità della coerenza
  - all'interno della teoria dei numeri non è possibile dimostrare che la teoria stessa è coerente (Gödel)
- Inoltre
  - le teorie che includono l'identità = sono sempre interpretabili in una struttura in cui la relazione corrispondente non è l'identità tra oggetti
  - alcune proprietà non sono caratterizzabili in una teoria
  - infatti ogni teoria che ammette un modello infinito ha anche un modello numerabile (Löwenheim-Skolem)
  - ... si pensi alla teoria dei numeri reali