Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alla logica formale

Marco Piastra

Argomenti

1. Logica Proposizionale
2. Logica dei Predicati
3. (Logiche non classiche)

Testi consigliati

- Magnani, L., Gennari, R.
  Manuale di Logica
  Guerini Scientifica, 1997
- Lolli, G.
  Introduzione alla logica formale
  il Mulino, 1988
- Asperti, A., Ciabattoni, A.
  Logica a informatica
  McGraw-Hill, 1997
- Crossley et al.
  Che cos'è la logica matematica?
  Boringhieri, 1972

Logica *formale*

- Logica come studio dei *processi di ragionamento* (e.g. in termini di correttezza, fondatezza, *automatizzabilità*)
- Manifesto intuitivo: "Mai conclusioni false da premesse vere!"
- Che i ragionamenti abbiano una *struttura formale* è un fatto accettato sin dall'antichità (e.g. Aristotele)
- La logica moderna si occupa del solo aspetto formale, cioè della *rappresentazione simbolica* dei processi di ragionamento

Gli albori

- La logica moderna (i.e. a partire dalla seconda metà dell'800) nasce dal desiderio di dare una forma rigorosa al linguaggio scientifico
- Il progetto (Frege 1884) è quello di creare un linguaggio da cui viene eliminato ogni elemento *intensionale* (i.e. il *pensiero* espresso) a vantaggio della componente *estensionale* (i.e. il riferimento oggettuale - i.e. "ciò di cui si parla")
- In questo modo, il processo di ragionamento dipende solo dagli oggetti a cui si riferisce e non dal modo di descriverli

Le speranze

- Un linguaggio perfetto per la scienza ed, in particolare, per la matematica (G. Frege)
- Un metodo per dimostrare la fondatezza (intesa come non contraddittorietà) delle teorie matematiche (D. Hilbert)
- Un sistema di calcolo che renda la dimostrazione dei teoremi un fatto puramente meccanico (D. Hilbert)

Le delusioni

- Il linguaggio logico di Frege non è esente da contraddizioni (B. Russell)
- Qualunque formalismo logico che possa descrivere la teoria elementare dei numeri contiene delle proposizioni indimostrabili (K. Gödel)
- In qualunque formalismo logico dello stesso tipo di cui sopra non è possibile dimostrare la coerenza del sistema medesimo (K. Gödel)
- Il calcolo dei predicati è indecidibile (A. Church)

Logica e IA

- Gli studi sull'intelligenza artificiale hanno dato nuovo impulso e nuova motivazione a tutto il settore della logica
- Il collegamento è evidente: "*AI is the study of mental faculties through the use of computational models*" (Charniak e McDermott 1985)
- Si ha comunque un cambiamento di orizzonte: da *fondamento*, la logica diventa *strumento* per la *rappresentazione* del ragionamento

1

Logica Proposizionale

Linguaggio proposizionale

- Un linguaggio proposizionale contiene:
  - un insieme non vuoto di *lettere proposizionali*: A, B, C, ...
  - due *connettivi* principali: $\emptyset$, $\bullet$
  - due simboli ausiliari: (,)
  - tre *connettivi* derivati: $\circ$, $\circ$, $\leftarrow$
- Si stabilisce che:
  - le lettere rappresentano proposizioni, ovvero frasi del linguaggio naturale
  - i connettivi sono le particelle che servono a formare frasi composite

Formalizzazione

- Esempio 1:
  - *SE* oggi è mercoledì *E* la radio è spenta
    QUINDI il computer è accesso
  - *AFFERMO* A $\circ$ B
    QUINDI A
- Esempio 2:
  - *SE* oggi è mercoledì
    ALLORA c'è mercato in piazza.
    Oggi è mercoledì,
    QUINDI c'è mercato in piazza.
  - *AFFERMO* A $\bullet$ B
    AFFERMO A
    QUINDI B
- Esempio 3:
  - *SE* oggi è mercoledì
    ALLORA c'è mercato in piazza.
    NON c'è mercato in piazza,
    QUINDI oggi *NON* è mercoledì.
  - *AFFERMO* A $\bullet$ B
    AFFERMO $\emptyset$ B
    QUINDI $\emptyset$ A

Connettivi

- Le tavole di verità dei connettivi primari sono:

A	B	A $\bullet$ B
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

A	$\emptyset$A
1	0
0	1

Da questi due si possono derivare (per composizione) tutti i connettivi possibili

- Per i connettivi derivati:

A	B	A $\circ$ B
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

A	B	A $\circ$ B
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

A	B	A $\leftarrow$ B
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Tavole di verità

- Si possono applicare a formule comunque composite

(*tautologia*)

A	B	A ® B	B ® A	(A ® B) Ù (B ® A)
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	1

- Si può verificare la relazione tra premesse e conseguenza

Da A e A ® B posso derivare B

A	A ® B	B
1	1	1
0	1	0 | 1
1	0	0
0	1	0 | 1

- Non servono tuttavia a derivare *formule* da altre *formule*

Anche se contengono già tutte le 'leggi del pensiero' in senso classico ..

Lp - Caratteristiche

- Riassumendo:
  - le lettere proposizionali A, B, C, ... rappresentano proposizioni la cui struttura linguistica viene ignorata
  - i connettivi Ø, ®, Ù, ∨, ↔ hanno il significato descritto dalle tavole di verità
  - le formule del linguaggio sono formate da lettere e connettivi, con eventuale uso delle parentesi
  - ogni proposizione può essere solo vera (1) o falsa (0) *(bivalenza)*
  - la verità o falsità delle formule composite dipende solo dalla verità o falsità delle proposizioni che vi compaiono *(vero-funzionalità)*

Sistema formale

- Idea intuitiva: un linguaggio logico dotato di una relazione di *derivabilità* di formule da insiemi di formule
- Lo scopo è quello di rappresentare in modo formale un insieme di 'leggi' che regolano i processi di ragionamento
- Un sistema formale comprende:
  - un linguaggio logico *L*
  - un insieme di *regole di buona formazione* per le formule (fbf)
  - una relazione . che associa ad ogni insieme di fbf S un insieme fbf j per cui si possa scrivere che:

    S . j

    cioè che j è *derivabile* da S

Sistema assiomatico (Hilbertiano)

- Comprende:
  - un linguaggio logico *L* ed l'insieme delle fbf Pro(*L*)
  - un insieme Ax di formule dette *assiomi*
  - un insieme di *regole di inferenza* che consentono di derivare formule da insiemi di formule
- Una *dimostrazione* di j a partire da S è:
  - una successione finita <j 1, ..., j n, j >
  - tale per cui per ogni j si ha che:
    - j Î Ax oppure
    - j Î S oppure
    - j è ottenibile tramite l'applicazione delle regole di inferenza alle fbf precedenti
- Derivabilità
  - si ha che S . j sse esiste una *dimostrazione* di j a partire da S

Assiomatizzazione di Lp

- Tre schemi di assioma:

  Ax1 j ® (y ® j)
  Ax2 (j ® (y ® c)) ® ((j ® y) ® (j ® c))
  Ax3 (Øj ® Øy) ® (y ® j)

  - Le lettere j , y e c indicano una fbf qualsiasi
  - Ogni sostituzione di j , y e c è un assioma
  - Esempio:
    A ® (B ® A)
- Una regola di inferenza (*modus ponens*):
  - MP $\dfrac{j \quad j \to y}{y}$
- Vale il Teorema di Deduzione:

  S È {j }. y sse S . (j ® y)

Esempi

- "Ex absurdo sequitur quodlibet":

  . j ® (Øj ® y) (ovvero j ,Øj . y)

  1: j ,Øj . Øj ® (Øy ® Øj) (Ax1)
  2: j ,Øj . Øj
  3: j ,Øj . Øy ® Øj (MP 1,2)
  4: j ,Øj . (Øy ® Øj) ® (j ® y) (Ax3)
  5: j ,Øj . j ® y (MP 4,3)
  6: j ,Øj . j
  7: j ,Øj . y (MP 5,6)
  8: . j ® (Øj ® y)

- Affermazione implica doppia negazione

  . j ® ØØj

  1: ØØj . ØØØØj ® ØØj (Ax1,D)
  2: ØØj . (ØØØØj ® ØØj) ® (Øj ® ØØØj) (Ax3)
  3: ØØj . Øj ® ØØØj (MP 2,1)
  4: ØØj . (Øj ® ØØØj) ® (ØØj ® j) (Ax3)
  5: ØØj . ØØj ® j (MP 4,3)
  6: ØØj . ØØj

Teoremi logici e teoremi

- In un sistema assiomatico, la derivabilità coincide con la dimostrabilità
- I *teoremi*, per definizione, sono le formule derivabili da un insieme di formule
  $S \vdash j$
- Un teorema che sia derivabile a partire dai soli assiomi Ax è un teorema logico
- Intuitivamente, la differenza è:
  - un *teorema logico* riguarda il processo di ragionamento
  - un *teorema* riguarda una specifica teoria descritta sinteticamente da un insieme di formule S (assiomi di una teoria)

Teoria del mercato:
(SE oggi è mercoledì ALLORA c'è mercato in piazza)

Semantica proposizionale

- Intuitivamente, abbiamo introdotto la nozione di sistema formale come linguaggio logico + relazione di derivazione
- Occorre ora studiare la relazione tra il sistema formale ed il *significato* delle formule

- *Assegnazione* di valori di verità:
  - dato l'insieme di lettere P di L
  - un'assegnazione è una funzione:
    $v : P \to \{0,1\}$
  - che può essere estesa ad una funzione:
    $v' : Pro(L) \to \{0,1\}$
    in base alle seguenti regole:
    - se $\alpha \in P$ allora $v'(\alpha) = v(\alpha)$
    - se $\alpha = \neg\beta$ allora $v'(\alpha) = 1$ sse $v'(\beta) = 0$
    - se $\alpha = \gamma \wedge \beta$ allora $v'(\alpha) = 1$ sse non si ha $v'(\gamma) = 1$ e $v'(\beta) = 0$

Soddisfacimento, conseguenza

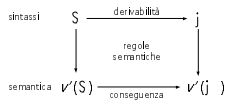
- Soddisfacimento
  - si dice che un'assegnazione v' soddisfa una fbf φ sse $v'(\varphi) = 1$
  - si dice che un'assegnazione v' soddisfa un insieme di fbf S sse v' soddisfa tutte le formule in S
  - una fbf è una *tautologia* se è soddisfatta da qualsiasi assegnazione
  - una fbf è una *contraddizione* se non è soddisfacibile
- Conseguenza logica
  - si dice che una fbf φ *consegue logicamente* da un insieme di fbf S e si scrive
    $S \vdash \varphi$
    sse qualsiasi assegnazione che soddisfa S soddisfa anche φ
  - due fbf φ e ψ tali per cui
    $\{\varphi\} \vdash \psi$ e $\{\psi\} \vdash \varphi$
    si dicono *logicamente equivalenti*

Sintassi e semantica

- Assiomi logici
  - Gli assiomi logici Ax sono tautologie
- Correttezza
  - La derivabilità nel sistema assiomatico L_P implica la conseguenza logica
  - In simboli:
    $S \vdash \varphi \Rightarrow S \models \varphi$
  - Quindi: tutti i teoremi logici sono *tautologie*
- Coerenza
  - La correttezza implica la coerenza: non si possono derivare *contraddizioni* dagli assiomi
  - Ciò è equivalente a dire che non tutte le fbf φ sono derivabili dagli assiomi ("Ex absurdo sequitur quodlibet")

Completezza

- Sistema assiomatico (hilbertiano)
  - Intuitivamente, si dice completo nel senso che l'insieme dei *teoremi logici* coincide con l'insieme delle *tautologie*
  - Formalmente, si può affermare che la nozione di *derivabilità* e di *conseguenza logica* coincidono
  - In simboli:
    $S \vdash \varphi \Leftrightarrow S \models \varphi$
- Schematicamente:



Decidibilità

- Una logica qualsiasi è detta *decidibile* se esiste un algoritmo che permetta di stabilire se
  $S \vdash \varphi$
- La logica proposizionale è senz'altro decidibile
  - alla peggio, dato che $S \models \varphi$ sono di dimensione finita, basta provare tutte le possibili assegnazioni
- Tuttavia:
  - in un sistema formale, la *decidibilità* corrisponde all'esistenza di un algoritmo per trovare una *dimostrazione*
  - si noti che tale nozione è applicabile anche ad un sistema formale per cui il calcolo semantico diretto non è possibile

2

Logica
dei Predicati

Logica predicativa

- La logica proposizionale ha molte interessanti proprietà:
  - è *completa*
  - qualunque *tautologia* è derivabile
  - è *decidibile*
- Il difetto principale sta nella *semplicità* del linguaggio:
  - solo concetti elementari sono esprimibili
  - solo processi di ragionamento relativamente ovvi possono essere studiati
- La logica dei predicati si basa su un linguaggio molto più ricco:
  - struttura più complessa
  - esprimibilità di concetti non intuitivi (e.g. ad estensione infinita)
  - rappresentazione di processi di ragionamento estremamente sofisticati

In sintesi, lo studio della logica è in larga misura lo studio della logica dei predicati

Sintassi

- Si considerino schemi del tipo:
  - *OGNI* mercoledì feriale si tiene il mercato in piazza.
    OGGI è mercoledì,
    QUINDI OGGI c'è mercato in piazza.
  - *AFFERMO* " x ((Mer(x) Fer(x)) Mrct(x))
    AFFERMO (Mer(Oggi) Fer(Oggi))
    QUINDI Mrct(Oggi)
  - *OGNI* essere umano è mortale.
    SOCRATE è un essere umano,
    QUINDI SOCRATE è mortale.
  - *AFFERMO* " x (Umano(x) Mortale(x))
    AFFERMO Umano(Socrate)
    QUINDI Mortale(Socrate)

Per la formalizzazione, mi servono *predicati*, *variabili*, *costanti* e *quantificatori* ...

Semantica

- Intuitivamente:
  - si considera un 'mondo di oggetti' preso come riferimento
  - esempio: l'insieme di tutti gli individui, l'insieme dei giorni dell'anno, etc.
  - tale insieme viene anche detto *universo del discorso*
- Predicati come insiemi
  - si rammenti che la formalizzazione ha come obiettivo la estromissione degli aspetti *intensionali* a beneficio di quelli *estensionali*
  - se di un concetto come 'Mercoledì' si toglie la descrizione astratta (e.g. 'il terzo giorno di ogni settimana') ...
  - ... resta solo l'*insieme* dei giorni che possiedono la proprietà di essere Mercoledì
- Variabili e costanti
  - le variabili rappresentano oggetti qualsiasi
  - le costanti rappresentano oggetti specifici (e.g. 'Socrate')

Sintassi formale

- Un linguaggio predicativo comprende:
  - un insieme di *simboli predicativi*, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - » esempio: P(x), G(x, y), Q(x, y, z), etc.
    - » eccezione: '=' (e.g. $x = y$)
  - un insieme di *simboli funzionali*, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - » esempio: $f(x)$, g(x, y), h(x, y, z), etc.
  - un insieme di *variabili*
    - » esempio: x, y, z, ...
  - un insieme di *costanti individuali*
    - » esempio: a, b, c, ...
  - i *connettivi* primari , , e derivati , ,
  - il *quantificatore universale* " ed il *quantificatore esistenziale*
  - le due parentesi (e)

Regole di buona formazione

- Termini
  - ogni variabile singola è un *termine*
  - ogni costante singola è un *termine*
  - se f è un simbolo funzionale a n argomenti e t_1, ..., t_n sono *termini*, allora $f(t_1, ..., t_n)$ è un *termine*
    - » esempi: x, a, $f(x)$, g(b, c)
- Formula atomica
  - se P è un simbolo predicativo a n argomenti e t_1, ..., t_n sono termini, allora $P(t_1, ..., t_n)$ è una *formula atomica*
    - » esempi: P(x), Q(y, a), R(b, c)
- Formule (fbf)
  - ogni formula atomica è una formula
  - se is una formula, allora (is) è una formula
  - se is e y sono formule, allora anche (is y), (is y), (is y) e (is y) sono formule
  - se is una formula, allora anche (" x is) e (x is) sono formule

Definizioni di base

- L'insieme Fbf($\mathcal{L}$):
  - dato un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$, è l'insieme delle formule costrute in base alle regole precedenti

    Nota: si dice del primo ordine un linguaggio predicativo in cui i quantificatori si applicano solo alle variabili e non ai predicati e/o alle funzioni
- Variabili libere e vincolate
  - si dice vincolata (in una fbf) una variabile che occorre nel raggio di azione di un quantificatore, libera se non è vincolata da alcun quantificatore
    - » esempi: $\forall x\, P(x)$, $P(x)$
- Formule aperte e chiuse
  - si dice *aperta* una formula in cui occorre almeno una variabile libera, si dice *chiusa* o anche *enunciato* in caso contrario

Nota: solo le formule *chiuse* hanno un valore di verità ...

Sistema assiomatico (Hilbertiano) per Lpo

- Sei schemi di assioma:

Come per Lp

Ax1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ax2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

Ax3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Ax4 $\forall x\varphi \to \varphi[x/t]$
se t è sostituibile per x in φ

Ax5 $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

Ax6 $\varphi \to \forall x\varphi$
se x non occorre libera in φ

- Le lettere φ, ψ e χ indicano una fbf qualsiasi
- Ogni sostituzione di φ, ψ e χ è un assioma
- Più due se si ammette il simbolo di identità:

Ax7 $t = t$

Ax8 $t = u \to (\varphi[x/t] \leftrightarrow \varphi[x/u])$

- Regole di inferenza: MP

Modelli

- Definizione
  - un enunciato φ viene detto *vero* in una struttura S sse esiste un'assegnazione v_O tale per cui $S, v_O \models \varphi$
  - una struttura S tale da rendere *vero* un enunciato φ è detta *modello* di φ e si scrive $S \models \varphi$
  - una struttura S è detta *modello* di un insieme di *enunciati* Σ sse rende veri tutti gli enunciati in Σ. In simboli $S \models \Sigma$
- Osservazioni
  - dato un enunciato φ ed una struttura S si ha che $S \models \varphi$ oppure $S \models \neg\varphi$, nel qual caso si ha $S \models \emptyset\varphi$
  - dato un insieme di enunciati Σ, può accadere che non esistano modelli di Σ. In tal caso, Σ si dice incoerente
  - Un insieme di enunciati Σ si dice una *teoria*

Sintassi e semantica

- Validità degli assiomi
  - gli assiomi Ax del sistema assiomatico per Lpo sono logicamente validi
- Correttezza di Lpo
  - si ha che:
    $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$
- Completezza di Lpo
  - si ha che:
    $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$

Limitazioni

- Incompletezza
  - la teoria dei numeri contiene degli enunciati *veri* (nella struttura di riferimento) che sono tuttavia indimostrabili (Gödel)
- Indimostrabilità della coerenza
  - all'interno della teoria dei numeri non è possibile dimostrare che la teoria stessa è coerente (Gödel)
- Inoltre
  - le teorie che includono l'identità – sono sempre interpretabili in una struttura in cui la relazione corrispondente non è l'identità tra oggetti
  - alcune proprietà non sono caratterizzabili in una teoria
  - infatti ogni teoria che ammette un modello infinito ha anche un modello numerabile (Löwenheim-Skolem)
  - ... si pensi alla teoria dei numeri reali

3

Logiche non Classiche

Logiche non classiche?

- Per logica classica si intende:
  - la logica proposizionale
  - la logica predicativa del primo ordine
  - (definite ed utilizzate nel modo descritto nelle precedenti lezioni)
- Direzioni di ampliamento
  - uso della logica classica in un modo diverso, cioè all'interno di un sistema formale costruito per scopi diversi
  - abbandono delle ipotesi di estensionalità o di vero-funzionalità
  - abbandono dell'ipotesi di bivalenza

Logica abduttiva

- Tre forme di inferenza

$\frac{i \rightarrow y \quad i}{y}$ **DEDUTTIVA**
SE i fagioli provengono da questo sacco
ALLORA i fagioli sono bianchi
I fagioli provengono da questo sacco
QUINDI i fagioli sono bianchi

$\frac{i \quad y}{i \rightarrow y}$ **INDUTTIVA**
I fagioli provengono da questo sacco
I fagioli sono bianchi
QUINDI
SE i fagioli provengono da questo sacco
ALLORA i fagioli sono bianchi

$\frac{i \rightarrow y \quad y}{i}$ **ABDUTTIVA**
SE i fagioli provengono da questo sacco
ALLORA i fagioli sono bianchi
I fagioli sono bianchi
QUINDI
i fagioli provengono da questo sacco

Logica abduttiva

- La logica di riferimento è ancora la logica classica
- Il modo di usarla è diverso, infatti:
  - si ha una base di conoscenze espressa da una teoria K (e.g. le cause per cui una macchina non parte)
  - si osservano un determinato numero di fatti, formalizzati in S
  - in generale K ⊬ S
  - quel che si cerca è un completamento G di K e S tale per cui
    K ∪ G ⊢ S
  - intuitivamente, G descrive le *ipotesi* che spiegano l'occorrenza di S

Esempio

- La base di conoscenza K
  K1: BatteriaScarica → LuciSpente ∪ MotorinoNonGira
  K2: MotorinoGuasto → MotorinoNonGira
  K3: MotorinoNonGira → MacchinaNonParte
  K4: NienteBenzina → IndicatoreAZero ∪ MacchinaNonParte
- I fatti S
  MacchinaNonParte
- Possibili completamenti (*ipotesi*) G
  - BatteriaScarica
  - MotorinoGuasto
  - NienteBenzina

Backward chaining

- In un certo senso, è il procedimento inverso di una *dimostrazione*
- Si parte dalle *conseguenze* e si investigano le *premesse* e le eventuali altre *conseguenze*
- Esempio:
  - Il fatto MacchinaNonParte interessa le tre le regole K1, K3, K4
  - tuttavia la K1 implica anche LuciSpente
  - la K4 implica anche IndicatoreAZero
  - (il sistema, in generale, promuove un accertamento)
  - la K3 invece è immediatamente percorribile all'indietro
- Tuttavia:
  - rispetto alla logica classica, si hanno delle implicazioni di mera *possibilità*
  - CarburatoreIngolfato → . OdoreBenzina ∪ MacchinaNonParte

Logiche multivalenti

- Origini storiche
  - il fatto che le logiche modali non siano vero-funzionali è stato dimostrato qualche tempo dopo la loro comparsa
  - agli inizi, alcuni logici formularono la congettura che le logiche modali potessero essere rese vero-funzionali ammettendo un insieme di valori di verità contenente più di due valori (Lukasiewicz)
  - malgrado le origini comuni, le due linee di (logiche modali, logiche multivalenti) ricerca si sono in seguito evolute lungo direzioni diverse
- Idea intuitiva
  - una logica a due soli valori rappresenta una sorta di certezza implicita riguardo alla *conoscibilità* del valore di verità
  - la presenza di ulteriori valori permette di rappresentare meglio situazioni di *incertezza* e/o di *ambiguità*

Logiche trivalenti

- Lukasiewicz

	0	U	1
0	0	0	0
U	0	U	U
1	0	U	1

	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	1
1	1	1	1

	0	U	1
0	1	1	1
U	1	U	1
1	0	U	1

0	1
U	U
1	0

- Bóchvar

	0	U	1
0	0	U	0
U	U	U	U
1	0	U	1

	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	U
1	1	U	1

	0	U	1
0	1	U	1
U	U	U	U
1	0	U	1

0	1
U	U
1	0

Logica a valori infiniti

- Lukasiewicz
  - definisce una famiglia di logiche che comprende sia la logica trivalente che la logica a valori infiniti compresi in [0, 1]
  - le regole algebriche di tale famiglia sono:

    $|\neg\varphi| = 1 - |\varphi|$

    $|\varphi \oplus \psi| = 1 - |\varphi| + |\psi|$

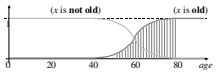
    $|\varphi \otimes \psi| = \min(|\varphi|, |\psi|)$

    $|\varphi \oplus \psi| = \max(|\varphi|, |\psi|)$

    $|\varphi \leftrightarrow \psi| = \min(1 - |\varphi| + |\psi|, 1 - |\psi| + |\varphi|)$
- Osservazioni
  - in questa logica $\varphi \otimes \neg\varphi$ non è una tautologia né $\varphi \oplus \neg\varphi$ è una contraddizione
  - in compenso, $(\varphi \oplus \psi) \otimes (\psi \oplus \varphi)$ rimane una tautologia
  - i valori in [0, 1] non possono essere probabilità: una logica probabilistica non può essere vero-funzionale

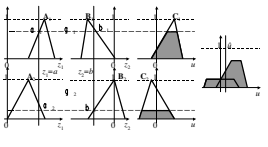
Logiche sfumate

- Logica multivalente?
  - talvolta le logiche sfumate vengono confuse con le logiche multivalenti
  - in realtà le logiche sfumate sono molto meno 'classiche'
- Insiemi sfumati
  - dato un universo del discorso U
  - un sottoinsieme di U può essere descritto da una funzione caratteristica $c : U \to \{0, 1\}$
  - l'idea di base degli insiemi sfumati è quella di accettare anche valori intermedi, cioè che $c : U \to [0, 1]$
  - in questo modo si vogliono rappresentare in modo 'più efficace' i termini linguistici che presentano un 'effetto borderline'



Inferenza sfumata

- Presupposti
  - alle 'formule' del linguaggio (non definito in modo rigoroso) vengono fatti corrispondere insiemi sfumati ed operatori insiemistici appropriati
  - l'inferenza consiste in un calcolo algebrico 'semantico' sugli insiemi sfumati
  - le 'conseguenze logiche' possono ma non necessariamente devono essere tradotte in un linguaggio
- Osservazioni
  - la parentela con i concetti della logica classica è assai remota
  - come per le logiche multivalenti, i presupposti fondamentali sono incompatibili con la probabilità
  - infatti, un insieme sfumato non è una distribuzione di probabilità (e.g. non è normalizzato a 1)

Esempio

- Tecnica di Mamdani (controlli automatici)
  - le regole sono del tipo:
    if $(z_1$ is $\mathbf{A}_k)$ **and** $(z_2$ is $\mathbf{B}_h)$ **then** $(u$ is $\mathbf{C}_k)$
  - in un controllore sfumato, si assume la presenza di una base di regole combinate tramite $\otimes$
  - la tecnica di calcolo può essere descritta come segue: