FONDAMENTI DI INFORMATICA B

Esercitazione n.1

Esercizi di sintesi mediante mappe

RIEPILOGO TEORICO - I

2 categorie di circuiti logici:

- **CIRCUITI COMBINATORI:**
  - **la relazione ingresso/uscita non dipende dal tempo**
  - **privi di stato interno**
- **CIRCUITI SEQUENZIALI:**
  - **l'uscita dipende anche dalla storia passata del circuito**
  - **presenza di stato interno (memoria)**

⇒ **Vedremo *reti combinatorie ad 1 uscita*:**
reti a più uscite possono essere scomposte nel parallelo di più reti ad 1 uscita

RIEPILOGO TEORICO - II

- **Obiettivi della minimizzazione logica:**
  - **minimizzare il numero di porte**
  - **a pari numero di porte, minimizz. il numero di ingressi**
  - **⇒ Minori costi**
- **Non più forme canoniche in senso stretto, minterm e maxterm,**
  ma *SdP* e *PdS minime*, *implicanti* (*implicati*) *principali* ed *essenziali*
- **Si devono trovare tutti gli implicanti (implicati) principali essenziali**
  +
  un insieme minimo di implicanti (implicati) principali

RIEPILOGO TEORICO - III

- **Per funzioni fino a 4, 5 o 6 variabili esistono tecniche di minimizzazione manuali che si appoggiano alle *mappe di Karnaugh*:**

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

collocazione dei numeri a 4 bit (da 0 a 15) all'interno di una mappa di Karnaugh

non sono riempite per avere i numeri in sequenza, ma per sfruttare le adiacenze tra le possibili configurazioni degli ingressi

ESERCIZIO n. 1

$$f(a,b,c,d) = \sum\nolimits_4 (1,3,7,8,9,12,13,15)$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

- **Minimizzare la funzione sia come somme di prodotti che come prodotti di somme**

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

COMPUTER ENGINEERING

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 1 - I

<u>Soluzione con Somme di Prodotti (copertura degli 1)</u>

1. **Trovare tutti gli implicanti <u>principali</u> della funzione e, tra questi, identificare quelli <u>essenziali</u>:**

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

gli implicanti principali essenziali <u>devono</u> comparire nella forma minima della funzione

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 1 - II

2. Trovare un set irridondante $R = \{p_1, K, p_r\}$ **di implicanti primi tali che:**

$$f = p_1 + K + p_r\ ,\ p_i \in R,\ \ ma\ \ f \neq p_1 + K + p_k\ ,\ p_i \in K \subset R$$

Questa funzione presenta 2 coperture irridondanti:

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

ottima perché contiene il minor numero di prodotti (quindi, di porte)

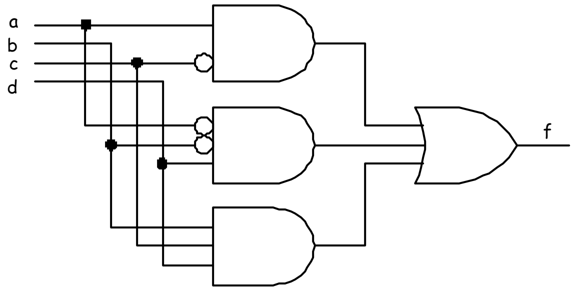
SOLUZIONE ESERCIZIO n. 1 - III

3. Formalizzare l'espressione minima:

$$f = a \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot d + b \cdot c \cdot d$$

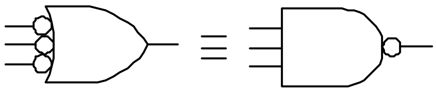
4. Rappresentare l'espr. minima con una RLC a 2 livelli:

- **con AND e OR**

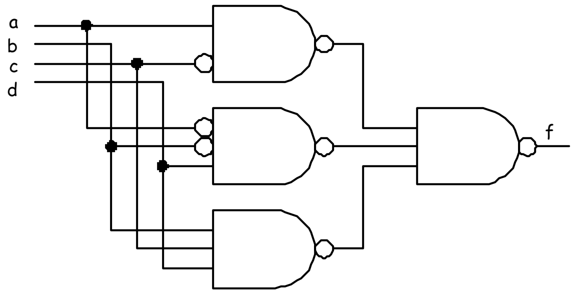


SOLUZIONE ESERCIZIO n. 1 - IV

– **oppure, grazie ad una delle leggi di De Morgan,**



con NAND



SOLUZIONE ESERCIZIO n. 1 - V

<u>Soluzione con Prodotti di Somme (copertura degli 0)</u>

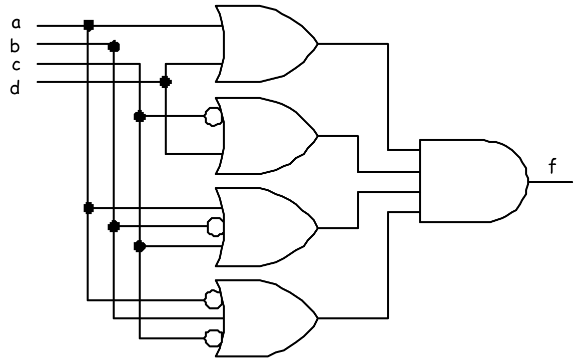
ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

$$f = (a+d)\cdot(\overline{c}+d)\cdot(a+\overline{b}+c)\cdot(\overline{a}+b+\overline{c})$$

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 1 - VI

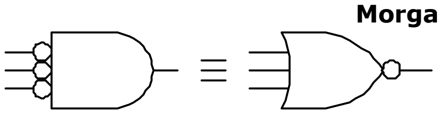
RLC a 2 livelli:

- **con OR e AND**

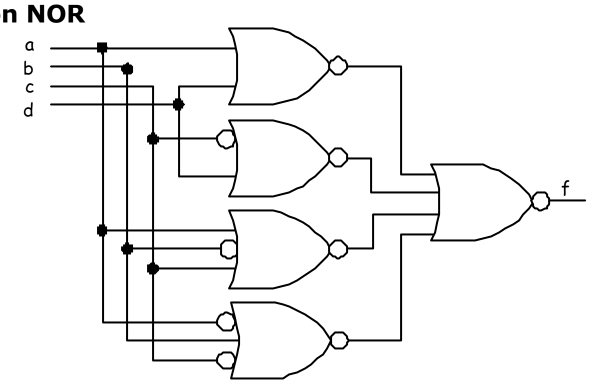


SOLUZIONE ESERCIZIO n. 1 - VII

- **Morgan,**



con NOR



RIEPILOGO DEL PROCEDIMENTO

1. **Trovare tutti gli implicanti (implicati) principali**
2. **Scegliere un insieme irridondante di implicanti (implicati) principali, la cui somma (prodotto) copra la funzione ed il cui costo complessivo sia minimo**

o meglio

1. **Trovare tutti gli implicanti (implicati) principali essenziali**
2. **Scegliere un insieme irridondante di ulteriori implicanti (implicati) principali, la cui somma (prodotto) copra la funzione ed il cui costo sia minimo**
3. **Formalizzare l'espressione minima**
4. **Rappresentare l'espr. minima con una RLC a 2 livelli**

CASI CRITICI

Attenzione ai bordi delle mappe:

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

ESERCIZIO n. 2a

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$$

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

- **Minimizzare la funzione come somme di prodotti, considerando le condizioni di indifferenza come 0**

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 2a

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$$f = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_0 + \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_0 + \bar{x}_3 \cdot x_1 \cdot x_0$$

Costo del circuito:

- **# porte = 5**
- **# letterali = 17**

ESERCIZIO n. 2b

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$$

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

- **Minimizzare la funzione come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza in modo adeguato**

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 2b

Differenze nel procedimento:

- **Attribuire un 1 (0) potenziale a tutte le indifferenze**
- **Trovare tutti gli implicanti (implicati) principali che non coprano solo indifferenze**
- **Coprire in modo ottimo la funzione originaria**

$$f = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \cdot x_1 + \bar{x}_2 \cdot x_0$$

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

Costo del circuito:

- **# porte = 4**
- **# letterali = 9**

ESERCIZIO n. 2c

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$$

$x_4=0$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$x_4=1$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	-	1	1	1
01	0	-	0	-
11	0	0	1	1
10	-	1	-	0

- **Minimizzare la funzione di 5 variabili come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza**

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 2c

$x_4=0$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$x_4=1$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	-	1	1	1
01	0	-	0	-
11	0	0	1	1
10	-	1	-	0

$$f = \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot x_0 + \overline{x}_4 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_1 + x_4 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$$

Costo del circuito:

- **# porte = 5**
- **# letterali = 15**

ESERCIZIO n. 3

Si abbia un numero binario di 5 bit, A, B, C, D, E, essendo A il più significativo ed E il meno significativo. Si determini:

1. **la funzione booleana che valga 1 solo quando il numero in questione è primo, tenendo presente che lo zero non è un numero primo;**
2. **l'espressione minima della funzione booleana come somma di prodotti e come prodotto di somme.**

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 3 - I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	x	x	x		x		x				x		x				x		x				x						x		x

A=0

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

A=1

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$$f = \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot E + \overline{B}\cdot D\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot E + A\cdot B\cdot C\cdot E$$

Costo del circuito:

- **# porte = 7**
- **# letterali = 28**

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 3 - II

A=0

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

A=1

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$$f=(D+E)\cdot(\overline{C}+E)\cdot(\overline{B}+E)\cdot(\overline{B}+C+D)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})\cdot(\overline{A}+E)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$$

Costo del circuito:

- **# porte = 9**
- **# letterali = 30**