

Fondamenti di Informatica B

Esercitazione n.2

Fondamenti di Informatica B

Esercitazione n.2

- Circuiti combinatori
- Sintesi mediante mappe di Karnaugh
- Mappe di Karnaugh con 5 variabili

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

2

Riepilogo teorico

■ CIRCUITI COMBINATORI:

- la relazione ingresso/uscita non dipende dal tempo
- privi di stato interno

⇒ Vedremo *reti combinatorie ad 1 uscita*:
reti a più uscite possono essere scomposte nel parallelo di più reti ad 1 uscita

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

3

Riepilogo teorico

■ Obiettivi della minimizzazione logica:

- minimizzare il numero di porte
 - a pari numero di porte, minimizz. il numero di ingressi
- ⇒ Minori costi

- Non più forme canoniche in senso stretto, minterm e maxterm, ma *SdP* e *PdS minime, implicanti (implicati) principali ed essenziali*

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

4

Riepilogo teorico

- Un *minterm* è una espressione prodotto che contiene in modo affermato o negato tutte le variabili della funzione.

		CD		
AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$$f = \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{B} C D + \overline{A} B \overline{C} D + \overline{A} B C D + A B C D$$

- Il numero di porte è elevato (6) ed anche il numero di letterali (25)

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

5

Riepilogo teorico

- Sfruttando le regole dell'algebra Booleana possiamo ridurre il numero di porte e letterali necessari

		CD		
AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$$f = \overline{A} D + B C D$$

- Abbiamo minimizzato la funzione: numero di porte = 3, numero di letterali = 7; passiamo da minterm ad implicanti

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

6

Riepilogo teorico

- Un implicante deve ricoprire un numero di celle che sia potenza di 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

	CD		00	01	11	10
AB	00	01	11	10		
00	0	0	1	0		
01	0	0	0	0		
11	0	0	1	0		
10	0	0	0	0		

	CD		00	01	11	10
AB	00	01	11	10		
00	0	0	1	0		
01	0	0	0	1		
11	0	0	0	1		
10	0	0	0	0		

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

7

Riepilogo teorico

- Un implicante si dice principale se non può essere espanso ulteriormente.

	CD		00	01	11	10
AB	00	01	11	10		
00	0	1	1	0		
01	0	1	1	0		
11	0	0	0	0		
10	0	0	0	0		

Implicante non principale

	CD		00	01	11	10
AB	00	01	11	10		
00	0	1	1	0		
01	0	1	1	0		
11	0	0	1	0		
10	0	0	0	0		

Implicante principale

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

8

Riepilogo teorico

- Un implicante principale si dice essenziale se copre 1 che non sono già coperti da nessun altro implicante.

	CD		00	01	11	10
AB	00	01	11	10		
00	0	0	1	0		
01	0	0	1	0		
11	0	1	1	0		
10	0	0	0	0		

Implicanti principali essenziali

Implicante principale non essenziale

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

9

Riepilogo teorico

- Stesse considerazioni valgono per:
 - maxterm*
 - PdS minima*
 - implicati*
 - implicati principali*
 - implicati principali ed essenziali*

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

10

Riepilogo teorico

METODO DELLE MAPPE DI KARNAUGH

- Trovare tutti gli implicanti (implicati) principali essenziali
- Scegliere un insieme irridondante di ulteriori implicanti (implicati) principali, la cui somma (prodotto) copra la funzione ed il cui costo sia minimo
- Formalizzare l'espressione minima
- Rappresentare con una RLC a 2 livelli

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

11

Riepilogo teorico

Attenzione all'ordine delle righe e delle colonne: muovendosi da una cella a quella vicina orizzontalmente o verticalmente cambia il valore di 1 sola variabile (anche sui bordi).

	AB		00	01	11	10
CD	00	01	11	10		
00	0	1	0	1		
01	0	1	0	0		
11	1	1	0	0		
10	1	1	0	0		

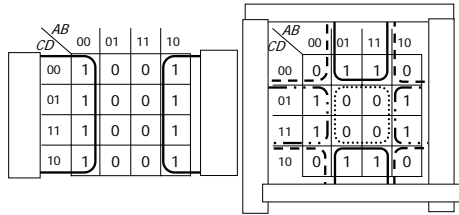
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

12

Riepilogo teorico

Attenzione ai bordi delle mappe:



Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

13

Esercizio 1

$$f(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$$

	CD		00	01	11	10
AB	00	01	11	10	00	01
	00	01	11	10	00	01
	01	00	01	10	00	01
	11	11	10	00	01	10
	10	11	10	00	01	10

- Minimizzare la funzione sia come somme di prodotti che come prodotti di somme

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

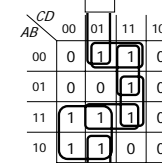
Fondamenti di informatica B

14

Esercizio 1

Soluzione con Somme di Prodotti (copertura degli 1)

- Trovare tutti gli implicant principali della funzione e, tra questi, identificare quelli essenziali:



gli implicant principali essenziali devono comparire nella forma minima della funzione

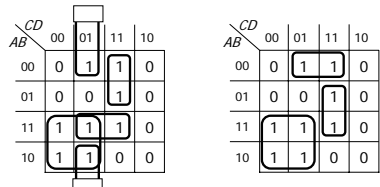
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

15

Esercizio 1

- Trovare un set irridondante di implicant principali tali che tutti gli 1 siano coperti e, togliendo uno qualsiasi di questi implicant gli 1 non siano più tutti coperti. Questa funzione ha almeno 2 coperture irridondanti:



ottima perché contiene il minor numero di prodotti (quindi, di porte)

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

16

Esercizio 1

- Formalizzare l'espressione minima:

	CD		00	01	11	10
AB	00	01	11	10	00	01
	00	01	11	10	00	01
	01	00	01	10	00	01
	11	11	10	00	01	10
	10	11	10	00	01	10

$$f = A\bar{C} + \bar{A}\bar{B}D + BCD$$

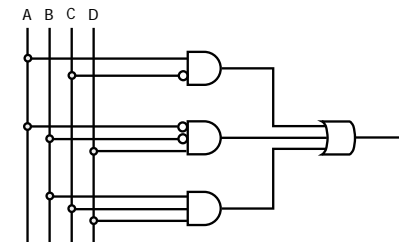
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

17

Esercizio 1

- Rappresentare l'espressione minima con una RLC a 2 livelli con AND e OR



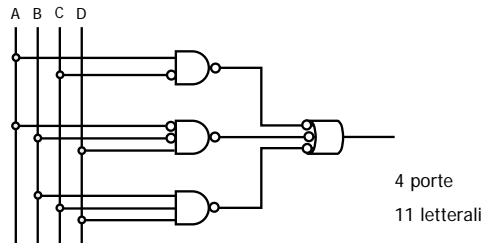
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

18

Esercizio 1

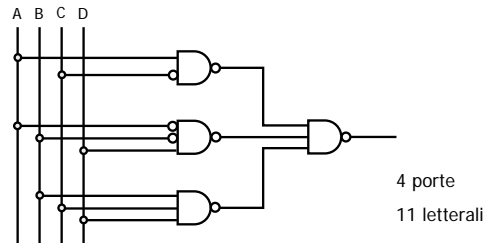
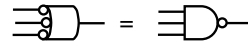
Mettendo 2 NOT lungo le linee



Esercizio n.2 - Mappe di Karnaugh Fondamenti di informatica B 19

Esercizio 1

Grazie ad una delle leggi di De Morgan



Esercizio n.2 - Mappe di Karnaugh Fondamenti di informatica B 20

Esercizio 1

Soluzione con Prodotti di Somme (copertura degli 0)

- Trovare tutti gli implicati principali della funzione e, tra questi, identificare quelli essenziali:

	CD			
AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

siccome tutti gli implicati principali trovati sono anche essenziali abbiamo trovato il Prodotto di Somme minimo

Esercizio n.2 - Mappe di Karnaugh Fondamenti di informatica B 21

Esercizio 1

- Formalizzare l'espressione minima:

	CD			
AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \bar{A} \bar{D} + C \bar{D} + A \bar{B} C + A \bar{B} \bar{C} \\ f &= \overline{\bar{A} \bar{D} + C \bar{D} + A \bar{B} C + A \bar{B} \bar{C}} \\ f &= (\bar{A} \bar{D}) (C \bar{D}) (\bar{A} \bar{B} C) (\bar{A} \bar{B} \bar{C}) \\ f &= (\bar{A} + D) (\bar{C} + D) (A + B + C) (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \\ f &= (A + D) (\bar{C} + D) (A + B + C) (A + B + C) \end{aligned}$$

Esercizio n.2 - Mappe di Karnaugh Fondamenti di informatica B 22

Riepilogo teorico

- Da notare come sia sufficiente negare le variabili degli implicati per ottenere il Prodotto di Somme corretto:

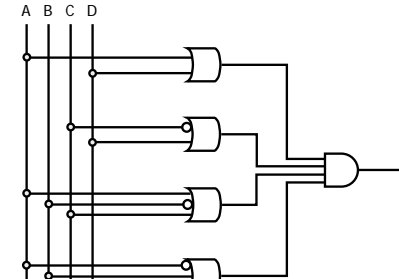
$$\begin{aligned} \bar{f} &= \bar{A} \bar{D} + C \bar{D} + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} \bar{B} \bar{C} \\ f &= (A + D) (\bar{C} + D) (A + B + C) (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \end{aligned}$$

Di seguito negheremo subito le variabili degli implicati e passeremo direttamente al Prodotto di Somme.

Esercizio n.2 - Mappe di Karnaugh Fondamenti di informatica B 23

Esercizio 1

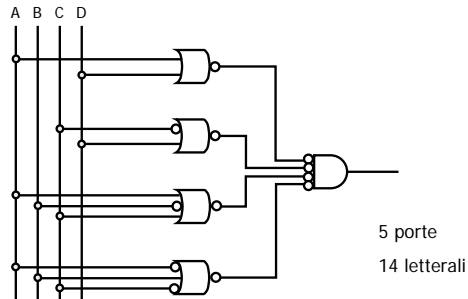
- Rappresentare l'espressione minima con una RLC a 2 livelli con OR e AND



Esercizio n.2 - Mappe di Karnaugh Fondamenti di informatica B 24

Esercizio 1

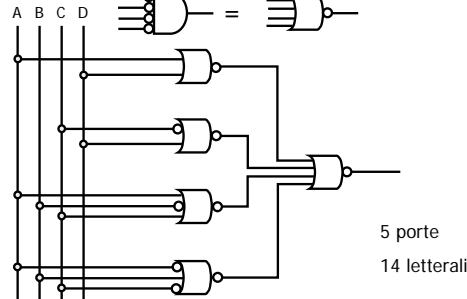
Mettendo 2 NOT lungo le linee



5 porte
14 letterali

Esercizio 1

Grazie ad una delle leggi di De Morgan



5 porte
14 letterali

Esercizio 2a

	CD			
AB	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

- Minimizzare la funzione come somme di prodotti, considerando le condizioni di indifferenza come 0

Esercizio 2a

	CD			
AB	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$$f = \bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D} + \bar{A} \bar{C} D + \bar{A} B C + A \bar{B} D$$

Costo del circuito:

- # porte = 5
- # letterali = 17

Esercizio 2b

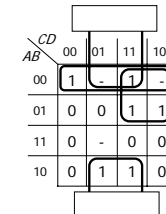
	CD			
AB	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

- Minimizzare la funzione come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza in modo adeguato

Esercizio 2b

Differenze nel procedimento:

- Attribuire un 1 (0) potenziale a tutte le indifferenze
- Trovare tutti gli implicanti (implicati) principali che non coprano solo indifferenze



$$f = \bar{A} \bar{B} + \bar{A} C + \bar{B} D$$

Costo del circuito:

- # porte = 4
- # letterali = 9

Riepilogo teorico

In assenza di condizioni di indifferenza è sempre possibile passare dalla funzione espressa in Somme di Prodotti alla funzione espressa in Prodotti di Somme sfruttando le regole dell'algebra booleana.

Tale procedimento è in generale impossibile in presenza di condizioni di indifferenza ed è errore **grave**.

Riepilogo teorico

Adiacenza delle celle omologhe delle 2 tabelle

		CD			
		00	01	11	10
AB					
	00	1	-	1	-
	01	0	0	1	1
	11	0	-	0	0
	10	0	1	1	0

$E=0$

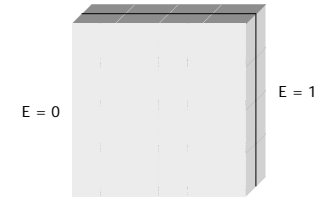
		CD			
		00	01	11	10
AB					
	00	-	1	1	1
	01	0	-	0	-
	11	0	0	1	1
	10	-	1	-	0

$E=1$

	A	B	C	D	E
	A	B	C	D	E

Riepilogo teorico

Si può considerare tridimensionalmente la tabella



Riepilogo teorico

Le coperture degli 1, o degli 0, va eseguita contemporaneamente su entrambe le tabelle utilizzando le stesse regole utilizzate per funzioni con meno di 5 variabili, tenendo conto dell'adiacenza delle celle omologhe delle due tabelle.

Considerare separatamente le due tabelle e successivamente unire i risultati è un errore **grave**.

Esercizio 3

		CD			
		00	01	11	10
AB					
	00	1	-	1	-
	01	0	0	1	1
	11	0	-	0	0
	10	0	1	1	0

$E=0$

		CD			
		00	01	11	10
AB					
	00	-	1	1	1
	01	0	-	0	-
	11	0	0	1	1
	10	-	1	-	0

$E=1$

- Minimizzare la funzione di 5 variabili come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza

Esercizio 3

		CD			
		00	01	11	10
AB					
	00	1	-	1	-
	01	0	0	1	1
	11	0	-	0	0
	10	0	1	1	0

$E=0$

		CD			
		00	01	11	10
AB					
	00	-	1	1	1
	01	0	-	0	-
	11	0	0	1	1
	10	-	1	-	0

$E=1$

$f = A \bar{B} + B D + A C E + A B C E$

- Costo del circuito:
- # porte = 5
 - # letterali = 15

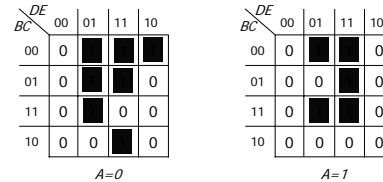
Esercizio 4

Si abbia un numero binario di 5 bit, A, B, C, D, E, essendo A il più significativo ed E il meno significativo.
Si determini:

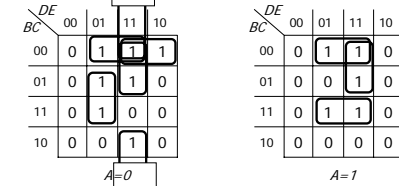
- la funzione booleana che valga 1 solo quando il numero in questione è primo, tenendo presente che lo zero non è un numero primo;
- l'espressione minima della funzione booleana come somma di prodotti e come prodotto di somme.

Esercizio 4

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
x x



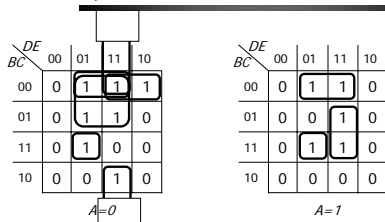
Esercizio 4



$$f = \overline{B} \overline{C} E + \overline{B} D E + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{C} D E + \overline{A} \overline{C} D E + A B C E$$

Costo del circuito:
 ■ # porte = 7
 ■ # letterali = 28

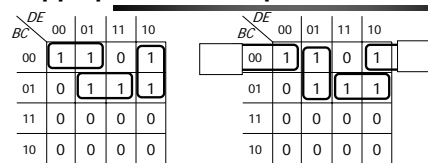
Esercizio 4 (soluzione alternativa)



$$f = \overline{B} \overline{C} E + \overline{A} \overline{B} E + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + B C \overline{D} E + \overline{A} \overline{C} D E + A C D E$$

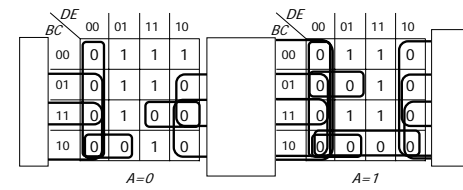
Costo del circuito:
 ■ # porte = 7
 ■ # letterali = 28

Una mappa può dare 2 coperture diverse?



$$\begin{aligned} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{B} C E + \overline{B} D \overline{E} &= \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} D E + \overline{B} C D \\ \overline{B} \overline{C} \overline{D} (E + \overline{E}) + \overline{B} C E (D + \overline{D}) + \overline{B} D \overline{E} (C + \overline{C}) &= \dots \\ \overline{B} \overline{C} \overline{D} E + \overline{B} \overline{C} \overline{D} \overline{E} + \overline{B} C D E + \overline{B} C \overline{D} E + \overline{B} C D \overline{E} + \overline{B} C \overline{D} \overline{E} &= \dots \\ \overline{B} D \overline{E} (C + \overline{C}) + \overline{B} C \overline{E} (D + \overline{D}) + \overline{B} C D (E + \overline{E}) &= \dots \\ \overline{B} D \overline{E} + \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} C D &= \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} D E + \overline{B} C D \end{aligned}$$

Esercizio 4



$$f = (D + E) (\overline{C} + E) (\overline{B} + E) (\overline{B} + C + D) (A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) (\overline{A} + E) (\overline{A} + \overline{B} + C) (\overline{A} + B + \overline{C} + D)$$

Costo del circuito:
 ■ # porte = 9
 ■ # letterali = 30