

Fondamenti di Informatica B

Esercitazione n.2

Fondamenti di Informatica B

Esercitazione n.2

- Circuiti combinatori
- Sintesi mediante mappe di Karnaugh
- Mappe di Karnaugh con 5 variabili

Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

2

Riepilogo teorico

- CIRCUITI COMBINATORI:
 - la relazione ingresso/uscita non dipende dal tempo
 - privi di stato interno
- ⇒ Vedremo *reti combinatorie ad 1 uscita*:
reti a più uscite possono essere scomposte nel parallelo di più reti ad 1 uscita

Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

3

Riepilogo teorico

- Obiettivi della minimizzazione logica:
 - minimizzare il numero di porte
 - a pari numero di porte, minimizz. il numero di ingressi⇒ Minori costi
- Non più forme canoniche in senso stretto, minterm e maxterm, ma *SdP e PdS minime, implicanti (implicati) principali ed essenziali*

Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

4

Riepilogo teorico

- Un *minterm* è una espressione prodotto che contiene in modo affermato o negato tutte le variabili della funzione.

	<i>CD</i>			
<i>AB</i> \	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$$f = \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{B} C D + \overline{A} B \overline{C} D + \overline{A} B C D + A B C D$$

- Il numero di porte è elevato (6) ed anche il numero di letterali (25)

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

5

Riepilogo teorico

- Sfruttando le regole dell'algebra Booleana possiamo ridurre il numero di porte e letterali necessari

	<i>CD</i>			
<i>AB</i> \	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$$f = \overline{A} D + B C D$$

- Abbiamo minimizzato la funzione: numero di porte = 3, numero di letterali = 7: passiamo da minterm ad implicanti

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

6

Riepilogo teorico

- Un implicante deve ricoprire un numero di celle che sia potenza di 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

	<i>CD</i>			
<i>AB</i> \	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

	<i>CD</i>			
<i>AB</i> \	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

7

Riepilogo teorico

- Un implicante si dice principale se non può essere espanso ulteriormente.

	<i>CD</i>			
<i>AB</i> \	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

Implicante non principale

	<i>CD</i>			
<i>AB</i> \	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

Implicante principale

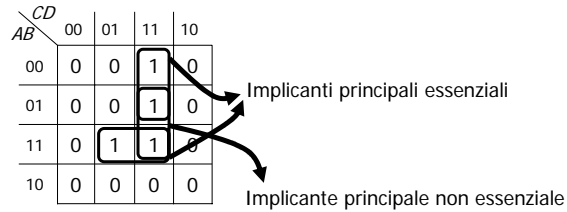
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

8

Riepilogo teorico

- Un implicante principale si dice essenziale se copre 1 che non sono già coperti da nessun altro implicante.



Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

9

Riepilogo teorico

- Stesse considerazioni valgono per:
 - *maxterm*
 - *PdS minima*
 - *implicati*
 - *implicati principali*
 - *implicati principali ed essenziali*

Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

10

Riepilogo teorico

METODO DELLE MAPPE DI KARNAUGH

- Trovare tutti gli implicanti (implicati) principali essenziali
- Scegliere un insieme irridondante di ulteriori implicanti (implicati) principali, la cui somma (prodotto) copra la funzione ed il cui costo sia minimo
- Formalizzare l'espressione minima
- Rappresentare con una RLC a 2 livelli

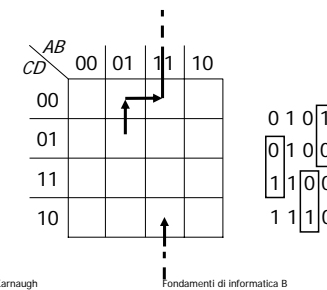
Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

11

Riepilogo teorico

Attenzione all'ordine delle righe e delle colonne: muovendosi da una cella a quella vicina orizzontalmente o verticalmente cambia il valore di 1 sola variabile (anche sui bordi).



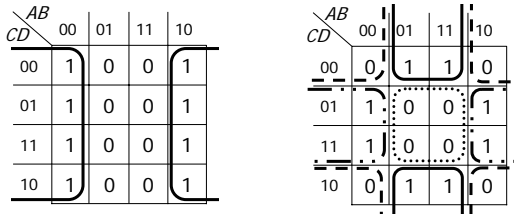
Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

12

Riepilogo teorico

Attenzione ai bordi delle mappe:



Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

13

Esercizio 1

$$f(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$$

	CD			
$AB \backslash$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

- Minimizzare la funzione sia come somme di prodotti che come prodotti di somme

Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

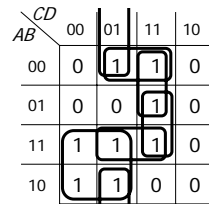
Fondamenti di informatica B

14

Esercizio 1

Soluzione con Somme di Prodotti (copertura degli 1)

- Trovare tutti gli implicanti principali della funzione e, tra questi, identificare quelli essenziali:



gli implicanti principali essenziali devono comparire nella forma minima della funzione

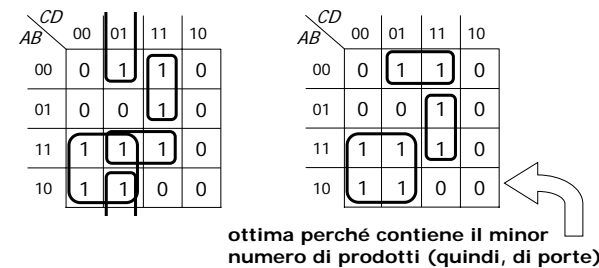
Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

15

Esercizio 1

- Trovare un set irridondante di implicanti principali tali che tutti gli 1 siano coperti e, togliendo uno qualsiasi di questi implicanti gli 1 non siano più tutti coperti. Questa funzione ha almeno 2 coperture irridondanti:



Esercitazione n.2 – Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

16

Esercizio 1

3. Formalizzare l'espressione minima:

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	0
	01	0	0	1	0
	11	1	1	1	0
	10	1	1	0	0

$$f = A \bar{C} + \bar{A} \bar{B} D + B C D$$

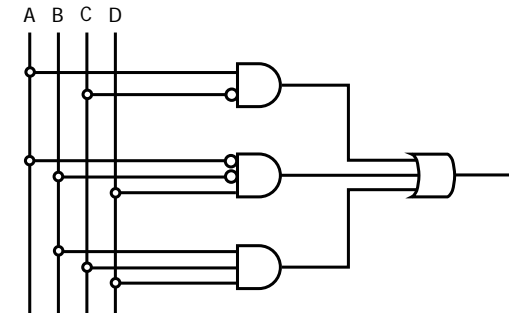
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

17

Esercizio 1

4. Rappresentare l'espressione minima con una RLC a 2 livelli con AND e OR



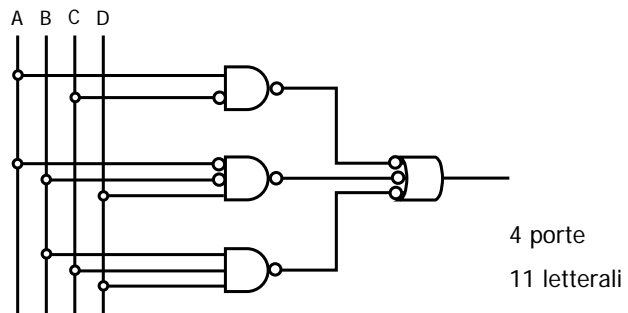
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

18

Esercizio 1

Mettendo 2 NOT lungo le linee



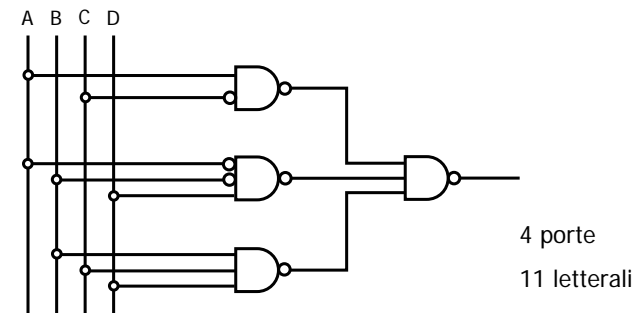
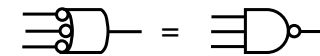
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

19

Esercizio 1

Grazie ad una delle leggi di De Morgan



Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

20

Esercizio 1

Soluzione con Prodotti di Somme (copertura degli 0)

1. Trovare tutti gli implicati principali della funzione e, tra questi, identificare quelli essenziali:

	CD			
AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

siccome tutti gli implicati principali trovati sono anche essenziali abbiamo trovato il Prodotto di Somme minimo

Esercizio 1

3. Formalizzare l'espressione minima:

	CD			
AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

$$\bar{f} = \bar{A} \bar{D} + C \bar{D} + \bar{A} B \bar{C} + A \bar{B} C$$

$$f = \overline{\bar{A} \bar{D} + C \bar{D} + \bar{A} B \bar{C} + A \bar{B} C}$$

$$f = (\bar{A} \bar{D}) (C \bar{D}) (\bar{A} B \bar{C}) (A \bar{B} C)$$

$$f = (\bar{A} + \bar{D}) (\bar{C} + D) (\bar{A} + B + C) (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

$$f = (A + D) (C + D) (A + B + C) (A + B + C)$$

Riepilogo teorico

- Da notare come sia sufficiente negare le variabili degli implicati per ottenere il Prodotto di Somme corretto:

$$\bar{f} = \bar{A} \bar{D} + C \bar{D} + \bar{A} B \bar{C} + A \bar{B} C$$

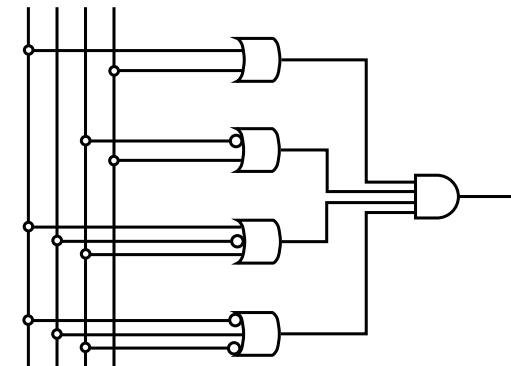
$$f = (A + D) (\bar{C} + D) (\bar{A} + B + C) (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

Di seguito negheremo subito le variabili degli implicati e passeremo direttamente al Prodotto di Somme.

Esercizio 1

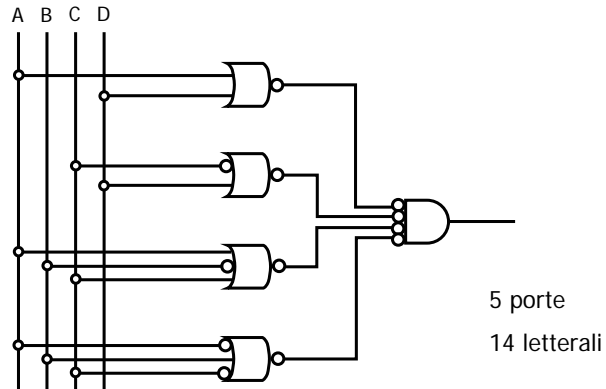
4. Rappresentare l'espressione minima con una RLC a 2 livelli con OR e AND

A B C D



Esercizio 1

Mettendo 2 NOT lungo le linee



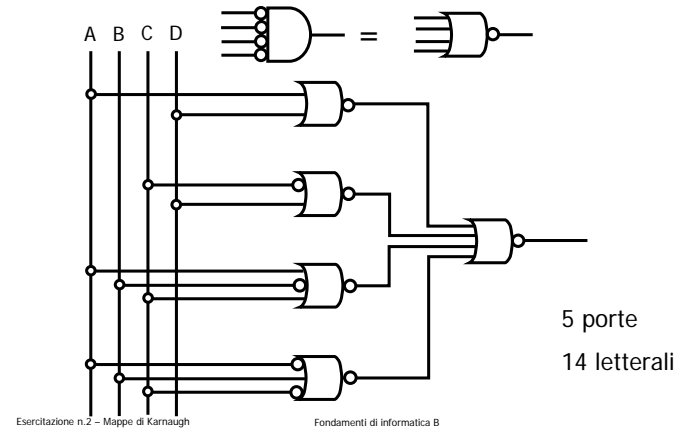
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

25

Esercizio 1

Grazie ad una delle leggi di De Morgan



Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

26

Esercizio 2a

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	1	-	1	-
	01	0	0	1	1
	11	0	-	0	0
	10	0	1	1	0

- Minimizzare la funzione come somme di prodotti, considerando le condizioni di indifferenza come 0

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

27

Esercizio 2a

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	1	-	1	-
	01	0	0	1	1
	11	0	-	0	0
	10	0	1	1	0

$$f = \bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D} + \bar{A} C D + \bar{A} B C + A \bar{B} D$$

Costo del circuito:

- # porte = 5
- # letterali = 17

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di Informatica B

28

Esercizio 2b

	CD			
AB	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

- Minimizzare la funzione come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza in modo adeguato

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

29

Esercizio 2b

Differenze nel procedimento:

- Attribuire un 1 (0) potenziale a tutte le indifferenze
- Trovare tutti gli implicanti (implicati) principali che non coprono solo indifferenze

	CD			
AB	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$$f = \bar{A} \bar{B} + \bar{A} C + \bar{B} D$$

Costo del circuito:

- # porte = 4
- # letterali = 9

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

30

Riepilogo teorico

In assenza di condizioni di indifferenza è sempre possibile passare dalla funzione espressa in Somme di Prodotti alla funzione espressa in Prodotti di Somme sfruttando le regole dell'algebra booleana.

Tale procedimento è in generale impossibile in presenza di condizioni di indifferenza ed è errore **grave**.

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

31

Riepilogo teorico

Adiacenza delle celle omologhe delle 2 tabelle

	CD			
AB	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$E=0$

	CD			
AB	00	01	11	10
00	-	1	1	1
01	0	-	0	-
11	0	0	1	1
10	-	1	-	0

$E=1$

$$\begin{matrix} A \bar{B} C D & \bar{E} \\ A \bar{B} C D & E \end{matrix}$$

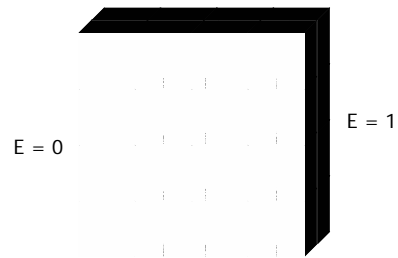
Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

32

Riepilogo teorico

Si può considerare tridimensionalmente la tabella



Riepilogo teorico

Le coperture degli 1, o degli 0, va eseguita contemporaneamente su entrambe le tabelle utilizzando le stesse regole utilizzate per funzioni con meno di 5 variabili, tenendo conto dell'adiacenza delle celle omologhe delle due tabelle.

Considerare separatamente le due tabelle e successivamente unire i risultati è un errore **grave**.

Esercizio 3

	<i>CD</i>			
<i>AB</i>	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

E=0

	<i>CD</i>			
<i>AB</i>	00	01	11	10
00	-	1	1	1
01	0	-	0	-
11	0	0	1	1
10	-	1	-	0

E=1

- Minimizzare la funzione di 5 variabili come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza

Esercizio 3

	<i>CD</i>			
<i>AB</i>	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

E=0

	<i>CD</i>			
<i>AB</i>	00	01	11	10
00	-	1	1	1
01	0	-	0	-
11	0	0	1	1
10	-	1	-	0

E=1

$$f = \bar{A} \bar{B} + \bar{B} D + \bar{A} C \bar{E} + A B C E$$

Costo del circuito:

- # porte = 5
- # letterali = 15

Esercizio 4

Si abbia un numero binario di 5 bit, A, B, C, D, E, essendo A il più significativo ed E il meno significativo.

Si determini:

- la funzione booleana che valga 1 solo quando il numero in questione è primo, tenendo presente che lo zero non è un numero primo;
- l'espressione minima della funzione booleana come somma di prodotti e come prodotto di somme.

Esercizio 4

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
 x

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

A=1

Esercizio 4

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

A=1

$$f = \overline{B} \overline{C} E + \overline{B} D E + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} C \overline{D} E + \overline{A} \overline{C} D E + A B C E$$

Costo del circuito:

- # porte = 7
- # letterali = 28

Esercizio 4 (soluzione alternativa)

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

A=1

$$f = \overline{B} \overline{C} E + \overline{A} \overline{B} E + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + B C \overline{D} E + \overline{A} \overline{C} D E + A C D E$$

Costo del circuito:

- # porte = 7
- # letterali = 28

Una mappa può dare 2 coperture diverse?

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$$\begin{aligned} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{B} C E + \overline{B} D \overline{E} &= \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} D E + \overline{B} C D \\ \overline{B} \overline{C} \overline{D} (E + \overline{E}) + \overline{B} C E (D + \overline{D}) + \overline{B} D \overline{E} (C + \overline{C}) &= \dots \\ \overline{B} \overline{C} \overline{D} E + \overline{B} \overline{C} \overline{D} \overline{E} + \overline{B} C D E + \overline{B} C \overline{D} E + \overline{B} C D \overline{E} + \overline{B} \overline{C} D \overline{E} &= \dots \\ \overline{B} \overline{D} E (C + \overline{C}) \quad \overline{B} \overline{C} \overline{E} (D + \overline{D}) \quad \overline{B} C D (E + \overline{E}) & \\ \overline{B} \overline{D} E + \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} C D = \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} D E + \overline{B} C D & \end{aligned}$$

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

41

Esercizio 4

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

A=1

$$f = (D + E) (\overline{C} + E) (\overline{B} + E) (\overline{B} + C + D) (A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) (\overline{A} + E) (\overline{A} + \overline{B} + C) (\overline{A} + B + \overline{C} + D)$$

Costo del circuito:

- # porte = 9
- # letterali = 30

Esercitazione n.2 - Mappe di Karnaugh

Fondamenti di informatica B

42