

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.4

- Minimizzazione logica
- Mappe di Karnaugh
- Esercizi

In questa lezione saranno analizzate alcune tecniche di minimizzazione di circuiti logici combinatori

Minimizzazione logica

- E' possibile sintetizzare la stessa funzione logica con circuiti diversi:
 - minimizzazione logica significa scegliere il circuito più semplice
- Per semplificare un circuito occorre:
 - esprimere la funzione realizzata dal circuito
 - semplificare l'espressione utilizzando le proprietà dell'algebra booleana

Minimizzazione logica

- Semplificare le espressioni mediante le proprietà dell'algebra booleana non garantisce una soluzione ottima:
 - le proprietà applicate dipendono dall'intuizione del progettista
- In casi semplici, tuttavia, esistono algoritmi che consentono la progettazione del circuito ottimo

Minimizzazione logica

- La traduzione in circuito delle forme canoniche non genera un progetto ottimo (a costo minimo)
- Costo minimo significa minimizzare:
 - numero di porte
 - numero di ingressi delle porte (fan-in)
- Per esempio, una forma SdP minima:
 - ha il numero minimo di termini prodotto
 - non è possibile eliminare variabili da alcun termine prodotto

Minimizzazione logica

- In una forma SdP, un termine prodotto è detto implicante se vale 1 per configurazioni di valori delle variabili per cui la funzione vale 1
- Un implicante è principale quando contiene il minor numero di variabili possibile, cioè, eliminando una variabile, non è più un implicante
- Un implicante è essenziale se è l'unico a coprire un determinato minterm

Minimizzazione logica

- Due implicanti si dicono adiacenti se differiscono per una variabile
- ES: $f = AB + AC\bar{D}$
 - ABC è un implicante, perché quando $ABC=1$, anche $f=1$
 - A non è un implicante, perché quando $A=1$ non sempre $f=1$
 - AB è un implicante principale
 - ABC e $ABC\bar{D}$ sono implicanti adiacenti

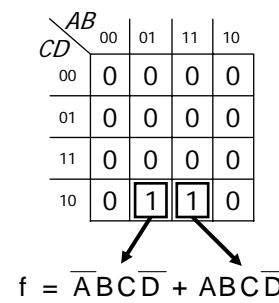
Minimizzazione logica

- Per minimizzazione logica si intende:
 - il calcolo di tutti gli implicanti principali di una funzione
 - la scelta dell'insieme minimo di implicanti principali la cui somma logica corrisponde alla funzione da minimizzare
- La minimizzazione logica è un problema intrattabile:
 - fino a 4 o 5 variabili esistono tecniche manuali
 - fino a 10 variabili esistono tecniche al calcolatore che garantiscono la soluzione ottima
 - oltre 10 variabili è necessario ricorrere a tecniche euristiche sub-ottime

Mappe di Karnaugh

- Permettono di identificare ad occhio gli implicantanti adiacenti
- Permettono di selezionare gli implicantanti essenziali e l'insieme minimo di implicantanti principali
- Sono difficilmente utilizzabili per funzioni con più di 5 variabili

Mappe di Karnaugh



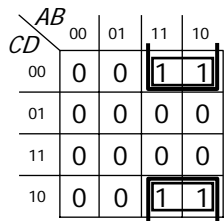
- Ogni casella rappresenta un valore della funzione
- Esempio: funzione che vale 1 solo per le combinazioni degli ingressi:
 - (A=0, B=1, C=1, D=0)
 - (A=1, B=1, C=1, D=0)

I due termini sono implicantanti adiacenti, così i corrispondenti 1 nella mappa risultano fisicamente adiacenti. Si raggruppano ad occhio i due implicantanti in uno unico:

$$f = BCD$$

Mappe di Karnaugh

- La struttura della mappa è toroidale



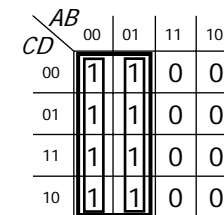
$$f = AC\overline{D} + A\overline{C}\overline{D}$$

Implicantanti adiacenti nella visione toroidale della mappa

$$f = A\overline{D}$$

Mappe di Karnaugh

- I raggruppamenti possibili sono rettangolari, con lati pari a 1 o a un multiplo di due



$$f = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B = \overline{A}$$

Mappe di Karnaugh

	AB		00	01	11	10
CD	00	1	1	1	1	1
	01	1	1	1	1	1
	11	1	1	1	1	1
	10	1	0	0	1	1

- E' possibile agire in modo duale. Se la maggior parte dei valori assunti dalla funzione è 1, è conveniente usare la forma PdS
- Esempio: funzione che vale 0 solo per la combinazione degli ingressi:
 - (A=0, B=1, C=1, D=0)
 - (A=1, B=1, C=1, D=0)

$$f = (A + \bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D) = \bar{B} + \bar{C} + D$$

Esercizi

- Progettare un circuito logico che accetti in ingresso una cifra decimale (da 0 a 9) e restituisca in uscita la cifra incrementata di 1
 - se in ingresso si presenta 9, l'uscita deve essere posta a 0

Esercizi

- Per rappresentare un numero decimale (0-9) sono necessari 4 bit
- Tuttavia, 4 bit possono codificare $2^4=16$ cifre diverse, mentre ne servono solamente 10
 - alcune combinazioni delle variabili in ingresso non si possono verificare
- In corrispondenza di una combinazione di ingressi che non si può verificare, non interessa quale sia l'uscita del circuito
 - condizione di indifferenza (don't care)

Esercizi

- Se x_1, x_2, x_3, x_4 sono i bit della parola in ingresso, e z_1, z_2, z_3, z_4 i bit di quella in uscita, le possibili configurazioni ingresso/uscita sono come in tabella:
 - si notino le condizioni di indifferenza

n°	INPUT				OUTPUT			
	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	z_3	z_4
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	0	0	0	0
10	1	0	1	0	-	-	-	-
11	1	0	1	1	-	-	-	-
12	1	1	0	0	-	-	-	-
13	1	1	0	1	-	-	-	-
14	1	1	1	0	-	-	-	-
15	1	1	1	1	-	-	-	-

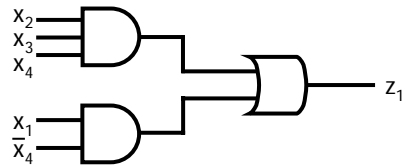
Esercizi

- Per risolvere l'esercizio, bisogna sintetizzare quattro funzioni: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4
- Sintesi mediante mappe di Karnaugh

– Z_1 :

x_3x_4	00	01	11	10	
x_1x_2	00	0	0	1	0
	01	0	0	1	0
	11	-	-	-	-
	10	1	0	-	-

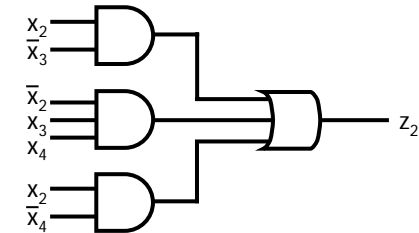
$$Z_1 = \underbrace{X_1 \bar{X}_4}_{\text{AND}} + \underbrace{X_2 X_3 X_4}_{\text{AND}}$$



Esercizi

- Mappa e circuito per z_2 :

x_3x_4	00	01	11	10	
x_1x_2	00	0	0	1	0
	01	1	1	0	1
	11	-	-	-	-
	10	0	0	-	-

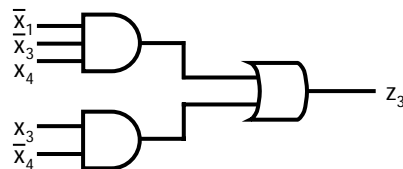


$$Z_2 = \underbrace{X_2 \bar{X}_4}_{\text{AND}} + \underbrace{X_2 \bar{X}_3}_{\text{AND}} + \underbrace{\bar{X}_2 X_3 X_4}_{\text{AND}}$$

Esercizi

- Mappa e circuito per z_3 :

x_3x_4	00	01	11	10	
x_1x_2	00	0	1	0	1
	01	0	1	0	1
	11	-	-	-	-
	10	0	0	-	-



$$Z_3 = \underbrace{\bar{X}_1 X_3 X_4}_{\text{AND}} + \underbrace{X_3 \bar{X}_4}_{\text{AND}}$$

Esercizi

- Mappa per z_4 :

x_3x_4	00	01	11	10	
x_1x_2	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	-	-	-	-
	10	1	0	-	-

$$Z_4 = \underbrace{\bar{X}_4}_{\text{AND}}$$

- Il circuito che realizza il sistema è costituito dall'insieme dei circuiti visti
- Soluzione non necessariamente ottima
 - possono esistere dei termini comuni, che potrebbero portare ad ulteriori ottimizzazioni

Esercizi

- Progettare un circuito logico che generi i comandi per un display a 7 segmenti
 - 4 variabili in ingresso
 - 7 uscite

