UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.3

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.3

- Forme canoniche
- Trasformazioni
- Esercizi

In questa lezione verranno considerate le proprietà dell'algebra booleana che saranno poi utili per l'analisi e la progettazione di circuiti a livello logico

Introdurremo poi le tecniche per trasformare la rappresentazione algebrica di un problema nella rappresentazione circuitale

Forme canoniche

- Un minterm è un'espressione prodotto che contiene in modo affermato o negato tutte le variabili della funzione
  – es: in una funzione di tre variabili $\{x_1, x_2, x_3\}$ sono minterm le seguenti espressioni:

$$\overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet x_3 \qquad x_1 \bullet \overline{x_2} \bullet x_3$$

  – mentre non sono minterm:

$$\overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \qquad x_1 \bullet x_3$$

Forme canoniche

- Un maxterm è un'espressione somma che contiene in modo affermato o negato tutte le variabili della funzione
  – es: in una funzione di tre variabili $\{x_1, x_2, x_3\}$ sono maxterm espressioni quali:

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 \qquad x_1 + \overline{x_2} + x_3$$

  – mentre non lo sono:

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} \qquad x_1 + x_3$$

Forme canoniche

- Si dicono forme canoniche le somme di minterm (SdP) e i prodotti di maxterm (PdS)
  – esempi di forme canoniche:
    - SdP: $(\overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet x_3) + (x_1 \bullet \overline{x_2} \bullet x_3)$
    - PdS: $(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)\,(x_1 + \overline{x_2} + x_3)$

La somma di numeri binari

- Si consideri la somma tra:

riporto	**1 1 1**
addendo	**1 0 1 1 +**
addendo	**0 1 1 1 =**
somma	**1 0 0 1 0**

S_0 e C_1 sono funzioni booleane nelle variabili $\{x_0, y_0, C_0\}$

x_0	y_0	C_0	S_0	C_1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

La somma di numeri binari

- Per sommare due numeri binari è quindi necessario sintetizzare due funzioni:
  - $S_0(x_0, y_0, C_0)$
  - $C_1(x_0, y_0, C_0)$
- Per sintetizzare una funzione è possibile ricorrere a:
  - somma di minterm (forma SdP)
  - prodotto di maxterm (forma PdS)

La somma di numeri binari

- Esempio: sintetizzare la funzione C_1
  - Selezionare gli 1 della funzione
  - a ciascuno di essi corrisponde un minterm

$$C_1 = \overline{x_0}y_0C_0 + x_0\overline{y_0}C_0 + x_0y_0\overline{C_0} + x_0y_0C_0$$

x_0	y_0	C_0	S_0	C_1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Una somma di minterm rappresenta direttamente tutti gli 1 di una funzione

La somma di numeri binari

- Esempio: sintetizzare la funzione C_1
  - Selezionare gli 0 della funzione
  - a ciascuno di essi corrisponde un maxterm

$$C_1 = (x_0 + y_0 + C_0) \bullet \left(x_0 + y_0 + \overline{C_0}\right) \bullet (x_0 + \overline{y_0} + C_0) \bullet (\overline{x_0} + y_0 + C_0)$$

x_0	y_0	C_0	S_0	C_1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Un prodotto di maxterm rappresenta direttamente tutti gli 0 di una funzione

Forme canoniche

- Una qualunque funzione $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ può essere espressa univocamente da una forma canonica costituita da:
  - somma di minterm:

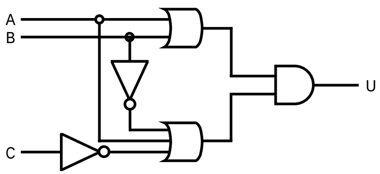
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_i (x_{i,1} \bullet x_{i,2} \bullet \cdots \bullet x_{i,n})$$

  - prodotto di maxterm:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_i (x_{i,1} + x_{i,2} + \cdots + x_{i,n})$$

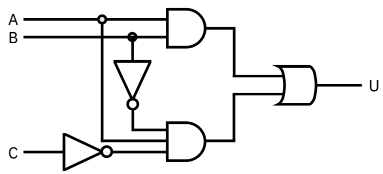
Logica a due livelli

- Qualunque espressione del tipo prodotto di somme (PdS) può essere implementata mediante un circuito a due livelli di logica
  - es: $U = (A+B)(A+\overline{B}+\overline{C})$



Logica a due livelli

- Qualunque espressione del tipo somma di prodotti (SdP) può essere implementata mediante un circuito a due livelli di logica
  - es: $U = (A \bullet B) + (A \bullet \overline{B} \bullet \overline{C})$



Logica a due livelli

- Anche le funzioni S_0 e C_1 possono essere sintetizzate con due livelli di logica

x_0	y_0	C_0	S_0	C_1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$C_{1(SP)} = \overline{x_0} y_0 C_0 + x_0 \overline{y_0} C_0 + x_0 y_0 \overline{C_0} + x_0 y_0 C_0$$

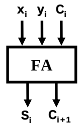
$$C_{1(PS)} = (x_0 + y_0 + C_0)(x_0 + y_0 + \overline{C_0}) \bullet (x_0 + \overline{y_0} + C_0)(\overline{x_0} + y_0 + C_0)$$

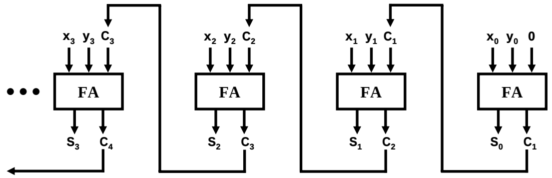
$$S_{0(SP)} = \overline{x_0}\,\overline{y_0} C_0 + \overline{x_0} y_0 \overline{C_0} + x_0 \overline{y_0}\,\overline{C_0} + x_0 y_0 C_0$$

$$S_{0(PS)} = (x_0 + y_0 + C_0)(x_0 + \overline{y_0} + \overline{C_0}) \bullet (\overline{x_0} + y_0 + \overline{C_0})(\overline{x_0} + \overline{y_0} + C_0)$$

Full adder

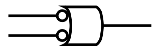
- Un circuito che implementa le funzioni S_0 e C_1 è detto Full Adder (FA) o sommatore completo
- Connettendo più FA assieme è possibile realizzare un circuito che somma numeri binari di lunghezza qualsiasi





Negazione logica

- Un cerchio all'ingresso o all'uscita di una porta logica significa negazione
- I nuovi simboli così costruiti possono essere utilizzati per rappresentare funzioni booleane anche complesse
  - es: $U = \overline{A} + \overline{B}$



Equivalenze

- Il Teorema di De Morgan afferma che:

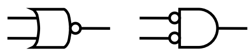
$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

che corrisponde all'equivalenza circuitale:

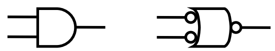
Le relazioni di equivalenza dell'algebra booleana si riflettono, a livello circuitale, in relazioni di equivalenza fra moduli logici

Equivalenze

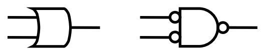
- E' possibile effettuare trasformazioni circuitali basate su proprietà logiche:



$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$



$$A \bullet B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$



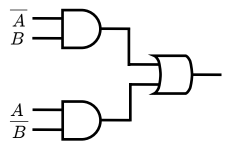
$$A + B = \overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}$$

La stessa funzione logica può essere rappresentata da circuiti diversi

Trasformazioni circuitali

- Funzione ex-or realizzata con un circuito a due livelli di logica

	A	B	U
	0	0	0
$\overline{A}B$	0	1	1
$A\overline{B}$	1	0	1
	1	1	0

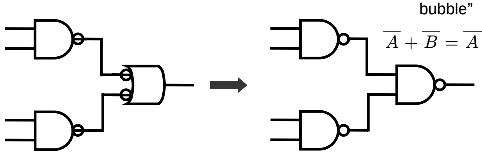


Trasformazioni circuitali

- Aggiungendo due negazioni all'inizio e alla fine della linea di un segnale, la funzione sintetizzata non cambia
- Sfruttando una delle equivalenze logiche, è possibile ottenere la stessa funzione con sole porte NAND

"push the bubble"

$\overline{A}+\overline{B}=\overline{A\bullet B}$



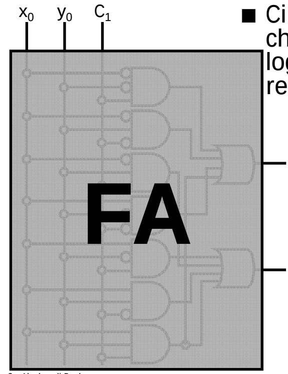
Trasformazioni circuitali

- Trasformazioni analoghe alla precedente possono essere applicate in casi più complessi:

$$\begin{aligned} ABC+DEF &= \overline{\overline{ABC}\bullet\overline{DEF}} \\ (A+B+C)(D+E+F) &= \overline{\overline{A+B+C}+\overline{D+E+F}} \end{aligned}$$

- E' possibile sintetizzare qualunque funzione rappresentata come SdP o PdS utilizzando solo porte NAND o solo porte NOR
  - sia le porte NAND che le porte NOR sono insiemi completi

Realizzazione circuitale di un FA



- Circuito a due livelli (SdP) che sintetizza le funzioni logiche necessarie per realizzare un FA:

$$S_{0(SP)} = \overline{x_0}\,\overline{y_0}C_0+\overline{x_0}y_0\overline{C_0}+x_0\overline{y_0}\,\overline{C_0}+x_0y_0C_0$$

$$C_{1(SP)} = \overline{x_0}y_0C_0+x_0\overline{y_0}C_0+x_0y_0\overline{C_0}+x_0y_0C_0$$

Esercizi

- Verificare la seguente identità:

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

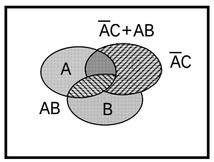
Dimostrazione:

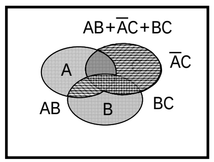
$$\begin{aligned} AB+\overline{A}C+BC &= AB+\overline{A}C+BC(A+\overline{A}) \\ &= AB+ABC+\overline{A}C+\overline{A}BC \\ &= AB(1+C)+\overline{A}C(1+B) \\ &= AB+\overline{A}C \end{aligned}$$

- Altre tecniche:
  - confronto delle tabelle della verità
  - diagrammi di Venn
  - confronto delle forme canoniche

Esercizi

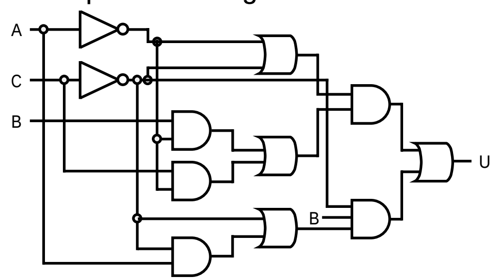
- Verifica dell'equivalenza con i diagrammi di Venn:





Esercizi

- Semplificare il seguente circuito:



$$U=B\overline{C}(\overline{C}+\overline{C}A)+(\overline{A}+\overline{C})(\overline{A}B+\overline{A}C)$$

Esercizi

- Occorre semplificare la relazione:

$$
\begin{aligned}
U &= B\overline{C}(\overline{C} + A\overline{C}) + (\overline{A} + \overline{C})(\overline{A}B + \overline{A}C) \\
&= B\overline{C} + (\overline{A} + \overline{C})(\overline{A}B + \overline{A}C) \\
&= B\overline{C} + (\overline{A} + \overline{C})\overline{A}(B + C) \\
&= B\overline{C} + (\overline{A} + \overline{A}\,\overline{C})(B + C) \\
&= B\overline{C} + \overline{A}(1 + \overline{C})(B + C) \\
&= B\overline{C} + \overline{A}(B + C)
\end{aligned}
$$