

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.2

- Algebra booleana
- Circuiti logici
- Elementi primitivi
- Esercizi con elementi logici

In questa lezione vengono ripresi i concetti principali di base dell'algebra booleana e introdotta la relazione tra quest'ultima e i circuiti logici

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.2

Alberto Broggi – Gianni Conte
A.A. 2005-2006

Algebra Booleana

- La teoria dei circuiti logici considera come modello matematico di supporto l'Algebra Booleana
 - (George Boole, matematico inglese, 1815-1864)
- L'algebra Booleana consiste di:
 - un insieme di elementi K
 - due funzioni $\{+, \bullet\}$ che fanno corrispondere a una qualsiasi coppia di elementi di K un elemento di K
 - una funzione $\{\bar{}\}$tali per cui valgono un insieme di assiomi

Assiomi dell'Algebra Booleana

1. K contiene al minimo due elementi a e b , tali che $a \neq b$
2. *Chiusura*: Per ogni a e b in K : $a+b \in K$ e $a \bullet b \in K$
3. *Proprietà commutativa*: $a+b = b+a$ e $a \bullet b = b \bullet a$
4. *Proprietà associativa*: $(a + b) + c = a + (b+c) = a+b+c$ e $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet b \bullet c$
5. *Identità*:
 - Esiste un elemento identità rispetto a $\{+\}$, tale che $a + 0 = a$, per ogni $a \in K$
 - Esiste un elemento identità rispetto a $\{\bullet\}$, tale che $a \bullet 1 = a$, per ogni $a \in K$

Algebra di Boole - Storia

- La logica greca: le formule logiche sono espresse nel linguaggio comune e soddisfano le normali regole sintattiche
- La logica matematica: si usa un linguaggio artificiale in cui parole e simboli hanno funzioni semantiche rigidamente definite
- G.Boole: Mathematical Analysis of Logic (1847)
 - Si costruisce un sistema formale e solo successivamente si assegna ad esso una interpretazione nel linguaggio comune

Assiomi dell'Algebra Booleana

6. *Proprietà distributiva*:
 $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$
 $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$
7. *Complemento*: per ogni $a \in K$ esiste un elemento $\bar{a} \in K$ tale che:
 $(a + \bar{a}) = 1$
 $(a \bullet \bar{a}) = 0$

Assiomi dell'Algebra Booleana

- E' possibile verificare che:
 - l'insieme $K=\{0, 1\}$
 - Le operazioni logiche OR, AND, NOT come definite dalle tabelle sottostanti

soddisfano tutti gli assiomi dell'algebra booleana

A	$f(A)=\bar{A}$	A	B	$f(A,B)=A+B$	A	B	$f(A,B)=A \cdot B$
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
		1	0	1	1	0	0
		1	1	1	1	1	1

Inversione OR
somma logica AND
prodotto logico

Altri Operatori Elementari

- E' possibile definire altre funzioni od operatori elementari

A	B	$f(A,B)=A \oplus B$	A	B	$f(A,B)=\overline{A+B}$
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0

EX-OR NOR

A	B	$f(A,B)=\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

Funzioni Booleane

- Oltre alle funzioni OR e AND esistono altre funzioni a due variabili
- Le funzioni a due variabili sono complessivamente 16

X	Y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

AND X somma aritm. o XOR OR NOR NAND

Algebra Booleana

- L'algebra booleana opera su variabili che possono solo assumere valore 0 o 1
- Una funzione logica

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

è una legge che fa corrispondere a ogni combinazione di valori delle variabili indipendenti

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

uno e un solo valore binario della variabile z

Proprietà (1)

N.	PROPRIETA'	NOME
1	Esistono gli elementi $0, 1 \in K$ tali che: $A + 0 = A$ $A \cdot 1 = A$	Esistenza elementi identità
2	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$	Proprietà commutativa
3	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	Proprietà distributiva
4	Per ogni $A \in K$, esiste \bar{A} tale che: $A \cdot \bar{A} = 0$ e $A + \bar{A} = 1$	Esistenza dell'inverso

Proprietà (2)

N.	PROPRIETA'	NOME
5	$A + (B + C) = (A + B) + C$ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	Proprietà associativa
6	$A + A = A$ $A \cdot A = A$	Proprietà dell'idempotenza
7	$\overline{\overline{A}} = A$ $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$	Legge di DeMorgan
8	$\overline{\bar{A}} = A$	Involuzione

Proprietà (3)

- Le tabelle precedenti riportano le proprietà principali dell'algebra booleana
- La verifica di tali proprietà può avvenire in tutti i casi mediante:
 - analisi esaustiva
 - utilizzando le proprietà riportate in precedenza

Principio di dualità

- Tutte le proprietà precedenti sono espresse a coppie
- Una proprietà è derivabile dall'altra con lo scambio di:

$$0 \leftrightarrow 1$$

$$+ \leftrightarrow \cdot$$

Teorema di De Morgan

DeMorgan (1806 - 1871)

E' possibile dimostrare il seguente teorema:

$$\overline{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \dots \cdot \overline{X_n}$$

Dimostrazione per induzione:

$$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \Rightarrow \text{verifica tabellare}$$

$$\overline{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + X_{n+1}} = \overline{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} \cdot \overline{X_{n+1}}$$

$$\Downarrow$$

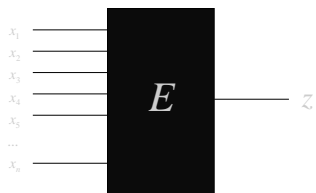
$$= (\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \dots \cdot \overline{X_n}) \cdot \overline{X_{n+1}}$$

Versione duale: $\overline{\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \dots \cdot \overline{X_n}} = \overline{\overline{X_1}} + \overline{\overline{X_2}} + \dots + \overline{\overline{X_n}}$

Porte Logiche

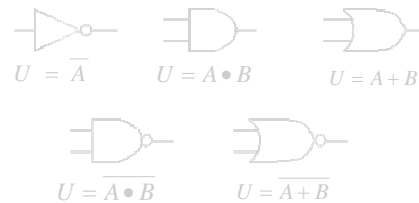
- Espressione logica generale:

$$z = E(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



Porte Logiche

- Una porta logica è un blocco elementare in cui la relazione fra variabili di ingresso e variabili di uscita è descritta da una funzione booleana



Elementi Primitivi

- Una qualunque funzione logica può essere realizzata utilizzando un numero limitato di funzioni elementari (**insieme completo**)
 - Sono insiemi completi: NAND, NOR, (AND,NOT), (OR,NOT)
- Questa proprietà garantisce che l'uso di un limitato numero di **funzioni** consente di rappresentare una **qualsunque funzione logica**
- Utilizzando un numero limitato di tipi di **porte** logiche è possibile realizzare un **circuito** che realizza una qualsiasi funzione logica

Esercizio 1

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. Ha stipulato la polizza n. 19 ed è un maschio sposato
- oppure 2. Ha stipulato la polizza n. 19 ed è sposato e ha meno di 25 anni
- oppure 3. Non ha stipulato la polizza n. 19 ed è una donna sposata
- oppure 4. E' un maschio con meno di 25 anni
- oppure 5. È sposato con 25 o più anni

E' possibile semplificare questa sequenza di regole ?

Esercizio 1

Le frasi precedenti possono essere trasformate:

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. Ha stipulato la polizza n. 19 AND è un maschio AND è sposato
- OR 2. Ha stipulato la polizza n. 19 AND è sposato AND ha meno di 25 anni
- OR 3. Non ha stipulato la polizza n. 19 AND è una donna AND è sposata
- OR 4. E' un maschio AND ha meno di 25 anni
- OR 5. È sposato AND ha 25 o più anni

Esercizio 1: soluzione

A = l'assicurando è coperto dalla polizza n. 19

B = l'assicurando è sposato

C = l'assicurando è maschio

D = l'assicurando ha meno di 25 anni.

1. $A \cdot B \cdot C$
2. $A \cdot B \cdot D$
3. $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$
4. $C \cdot D$
5. $B \cdot \bar{D}$

Esercizio 1: soluzione

$$\begin{aligned}
 & A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D + B \cdot \bar{D} = \\
 & A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot D + \underbrace{B \cdot D}_{(A+1)} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D = \\
 & A \cdot B \cdot C + A \cdot B + B \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D = \\
 & \underbrace{A \cdot B}_{(\bar{C}+1)} + B \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D = \\
 & A \cdot B + B \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{D} + C \cdot D = \\
 & A \cdot B + B \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{D} + B \cdot C \cdot D + C \cdot D = \\
 & A \cdot B + B \cdot (\bar{C} + \bar{D} + C \cdot D) + C \cdot D = \\
 & A \cdot B + B + C \cdot D = B + C \cdot D
 \end{aligned}$$

Esercizio 1: soluzione

A = l'assicurando ha stipulato la polizza n. 19

B = l'assicurando è sposato

C = l'assicurando è maschio

D = l'assicurando ha meno di 25 anni.

Soluzione $\Leftrightarrow B + C \cdot D$

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. E' sposato
- oppure 2. E' un maschio con meno di 25 anni.

Esercizio 1: soluzione

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D + B \cdot \bar{D} = B + CD$$

		A,B			
		00	01	11	10
C,D	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	1	1	0

L'uso delle mappe consente di trovare facilmente la soluzione ottima

Esercizio 2

- Cinque astronauti A,B,C,D,E sono pronti per una missione. Per definire la lista di coloro che partiranno è necessario soddisfare tutte le seguenti relazioni:
 - A o B devono necessariamente essere inclusi nella lista, ma non contemporaneamente;
 - C o E devono essere inclusi nella lista, anche contemporaneamente;
 - qualora D sia incluso nella lista anche B deve essere incluso nella lista;
 - A e C possono essere entrambi inclusi o entrambi esclusi dalla lista;
 - qualora E sia incluso anche C e D lo devono essere.

Esercizio 2: soluzione

A, B, C, D, E sono variabili indipendenti che assumono valore 1 se l'astronauta corrispondente viene prescelto e valore 0 in caso opposto.

Ognuna delle 5 condizioni a, b, c, d, e deve essere verificata indipendentemente e assume valore 1 se i valori assegnati alle variabili indipendenti soddisfano ai vincoli imposti e valore 0 se non soddisfano.

- A o B devono necessariamente essere inclusi nella lista, ma non contemporaneamente;
 $a = a(A,B) = \overline{AB} + AB$ (a=1 se A=1 e B=0 oppure A=0 e B=1)
- C o E devono essere inclusi nella lista, anche contemporaneamente;
 $b = b(C,E) = C + E$ (b=1 se C=1 oppure E=1)

Esercizio 2: soluzione

- qualora D sia incluso nella lista anche B deve essere incluso nella lista;
 $c = c(D,B) = DB + \overline{D}$ (c=1 se D=0 oppure D=1 e B=1)
- A e C possono essere entrambi inclusi o entrambi esclusi dalla lista;
 $d = d(A,C) = AC + \overline{AC}$ (d=1 se A=1 e C=1 oppure A=0 e C=0)
- qualora E sia incluso anche C e D lo devono essere.
 $e = e(E,C,D) = ECD + \overline{E}$ (e=1 se E=0 oppure E=1, C=1, D=1)

Esercizio 2: soluzione

$$Z = (A'B + AB')(C+E)(DB+D')(AC+A'C')(ECD+E') =$$

$$(A'BC' + AB'C)(C+E)(DB+D')(ECD+E') =$$

$$(A'BC' + AB'C)(CDE+CE')(DB+D') =$$

$$(A'BC'D + A'BC'D' + AB'CD') (CDE+CE') =$$

$$AB'CD'E'$$

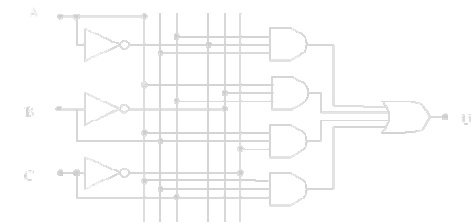
Esercizio 3

Progettare un circuito logico a 3 ingressi (A,B,C) e una uscita U che assuma valore 1 quando, all'ingresso, il numero degli 1 supera il numero degli 0. (Circuito di rilevazione di maggioranza)

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Esercizio 3: soluzione



$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Esercizio 3: soluzione

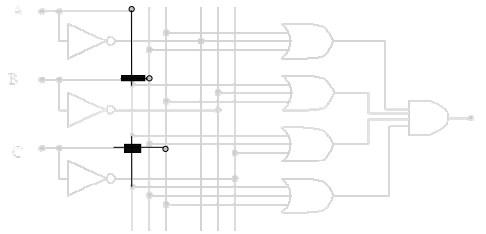
Soluzione alternativa:

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{A+B+C} A+B+\bar{C} \\
 \xrightarrow{A+B+\bar{C}} A+\bar{B}+C \\
 \xrightarrow{\bar{A}+B+C} \bar{A}+B+C
 \end{array}$$

$$U = (\bar{A}+B+C) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+B+C)$$

Esercizio 3: soluzione



$$U = (\bar{A}+B+C) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+B+C)$$

Esercizio 4

Progettare un circuito che accetti in ingresso numeri da 0 a 15.

L'uscita deve assumere valore 1 quando il numero è primo.

Soluzione:

- Rappresentare i numeri secondo una codifica binaria (4 bit)
- Scrivere la tabella della funzione
- Inserire tante porte AND quanti sono gli 1 della funzione
- Inserire una porta OR per generare l'uscita