UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.2

Alberto Broggi – Gianni Conte

A.A. 2005-2006

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.2

- Algebra booleana
- Circuiti logici
- Elementi primitivi
- Esercizi con elementi logici

In questa lezione vengono ripresi i concetti principali di base dell'algebra booleana e introdotta la relazione tra quest'ultima e i circuiti logici

Algebra di Boole - Storia

- La logica greca: le formule logiche sono espresse nel linguaggio comune e soddisfano le normali regole sintattiche
- La logica matematica: si usa un linguaggio artificiale in cui parole e simboli hanno funzioni semantiche rigidamente definite
- G.Boole: Mathematical Analysis of Logic (1847)
  – Si costruisce un sistema formale e solo successivamente si assegna ad esso una interpretazione nel linguaggio comune

Algebra Booleana

- La teoria dei circuiti logici considera come modello matematico di supporto l'Algebra Booleana
  – (George Boole, matematico inglese, 1815-1864)
- L'algebra Booleana consiste di:
  – un insieme di elementi K
  – due funzioni {+, •} che fanno corrispondere a una qualsiasi coppia di elementi di K un elemento di K
  – una funzione {¯}

  tali per cui valgono un insieme di assiomi

Assiomi dell'Algebra Booleana

1. K contiene al minimo due elementi *a* e *b*, tali che $a \neq b$
2. *Chiusura:* Per ogni *a* e *b* in K*:* $a+b \subset$ K e $a \bullet b \subset$ K
3. *Proprietà commutativa:* $a+b = b+a$ e $a \bullet b = b \bullet a$
4. *Proprietà associativa:* $(a + b) + c = a + (b+c) = a+ b+c$ e $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet b \bullet c$
5. *Indentità:*
   – Esiste un elemento identità rispetto a {+}, tale che $a + 0 = a$, per ogni $a \subset$ K
   – Esiste un elemento identità rispetto a {$\bullet$}, tale che $a \bullet 1 = a$, per ogni $a \subset$ K

Assiomi dell'Algebra Booleana

6. *Proprietà distributiva:*
   $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$
   $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$
7. *Complemento:* per ogni $a \subset$ K esiste un elemento
   $\overline{a} \subset$ K tale che:
   $(a + \overline{a}) = 1$
   $(a \bullet \overline{a}) = 0$

Assiomi dell'Algebra Booleana

■ E' possibile verificare che:
  – l'insieme K={0, 1}
  – Le operazioni logiche OR, AND, NOT come definite dalle tabelle sottostanti

soddisfano tutti gli assiomi dell'algebra booleana

A	$f(A)=\overline{A}$
1	0
0	1

Inversione

A	B	f(A,B)=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR
somma logica

A	B	$f(A,B)=A \bullet B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND
prodotto logico

Altri Operatori Elementari

■ E' possibile definire altre funzioni od operatori elementari

A	B	$f(A,B)=A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EX-OR

A	B	$f(A,B)=\overline{A \bullet B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

A	B	$f(A,B)=\overline{A+ B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR

Funzioni Booleane

- Oltre alle funzioni OR e AND esistono altre funzioni a due variabili
- Le funzioni a due variabili sono complessivamente 16

X	Y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

AND X somma aritm. o XOR OR NOR NAND

Algebra Booleana

- L'algebra booleana opera su variabili che possono solo assumere valore 0 o 1
- Una funzione logica $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

  è una legge che fa corrispondere a ogni combinazione di valori delle variabili indipendenti $x_1, x_2, ..., x_n$

  uno e un solo valore binario della variabile *z*

Proprietà (1)

N.	PROPRIETA'	NOME
1	Esistono gli elementi 0,1∈K tali che : A + 0 = A A • 1 = A	Esistenza elementi identità
2	A + B = B + A A • B = B • A	Proprietà commutativa
3	A • (B + C) = A •B + A • C A + (B • C) = (A +B) • (A + C)	Proprietà distributiva
4	Per ogni A ∈ K, esiste $\bar{A}$ tale che: $A \bullet \bar{A} = 0$ e $A + \bar{A} = 1$	Esistenza dell'inverso

Proprietà (2)

N.	PROPRIETA'	NOME
5	A + (B + C) = (A + B) + C A (BC) = (AB) C	Proprietà associativa
6	A + A = A A • A = A	Proprietà dell'idempotenza
7	$\overline{A + B} = \bar{A} \bullet \bar{B}$ $\overline{A \bullet B} = \bar{A} + \bar{B}$	Legge di DeMorgan
8	$\bar{\bar{A}} = A$	Involuzione

Proprietà (3)

- Le tabelle precedenti riportano le proprietà principali dell'algebra booleana
- La verifica di tali proprietà può avvenire in tutti i casi mediante:
  - analisi esaustiva
  - utilizzando le proprietà riportate in precedenza

Principio di dualità

- Tutte le proprietà precedenti sono espresse a coppie
- Una proprietà è derivabile dall'altra con lo scambio di:

$$0 \leftrightarrow 1$$

$$+ \leftrightarrow \bullet$$

Teorema di De Morgan

**DeMorgan (1806 - 1871)*

E' possibile dimostrare il seguente teorema:

$$\overline{X_1 + X_2 + \ldots X_n} = \overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2 \bullet \ldots \bullet \overline{X}_n$$

Dimostrazione per induzione:

$$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2 \Rightarrow$$ verifica tabellare

$$\overline{(X_1 + X_2 + \ldots X_n) + X_{n+1}} = \overline{(X_1 + X_2 + \ldots X_n)} \bullet \overline{X}_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

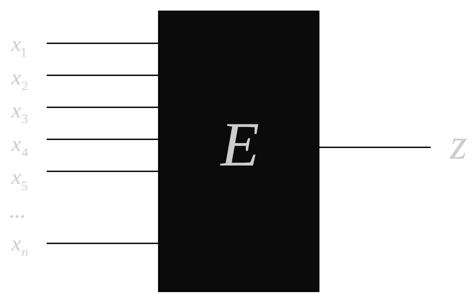
$$= (\overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2 \bullet \ldots \overline{X}_n) \bullet \overline{X}_{n+1}$$

Versione duale: $\overline{X_1 \bullet X_2 \bullet \ldots \bullet X_n} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots \overline{X}_n$

Porte Logiche

- Espressione logica generale:

$$z = E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$



Porte Logiche

- Una porta logica è un blocco elementare in cui la relazione fra variabili di ingresso e variabili di uscita è descritta da una funzione booleana

Elementi Primitivi

- Una qualunque funzione logica può essere realizzata utilizzando un numero limitato di funzioni elementari (insieme completo)
  - Sono insiemi completi:
    NAND, NOR, (AND,NOT), (OR,NOT)
- Questa proprietà garantisce che l'uso di un limitato numero di funzioni consente di rappresentare una qualunque funzione logica
- Utilizzando un numero limitato di tipi di porte logiche è possibile realizzare un circuito che realizza una qualsiasi funzione logica

Esercizio 1

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. Ha stipulato la polizza n. 19 ed è un maschio sposato

oppure 2. Ha stipulato la polizza n. 19 ed è sposato e ha meno di 25 anni

oppure 3. Non ha stipulato la polizza n. 19 ed è una donna sposata

oppure 4. E' un maschio con meno di 25 anni

oppure 5. È sposato con 25 o più anni

E' possibile semplificare questa sequenza di regole ?

Esercizio 1

Le frasi precedenti possono essere trasformate:

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. Ha stipulato la polizza n. 19 AND è un maschio AND è sposato

OR 2. Ha stipulato la polizza n. 19 AND è sposato AND ha meno di 25 anni

OR 3. Non ha stipulato la polizza n. 19 AND è una donna AND è sposata

OR 4. E' un maschio AND ha meno di 25 anni

OR 5. È sposato AND ha 25 o più anni

Esercizio 1: soluzione

A = l'assicurando è coperto dalla polizza n. 19

B = l'assicurando è sposato

C = l'assicurando è maschio

D = l'assicurando ha meno di 25 anni.

1. $A \cdot B \cdot C$ 2. $A \cdot B \cdot D$

3. $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ 4. $C \cdot D$

5. $B \cdot \bar{D}$

Esercizio 1: soluzione

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D + B \cdot \bar{D} =$$

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot D + B \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D = \quad \cdot(A+1)$$

$$A \cdot \cancel{B \cdot C} + A \cdot B + B \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D =$$

$$A \cdot B + B \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D = \quad \cdot(\bar{C}+1)$$

$$A \cdot B + B \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{D} + C \cdot D =$$

$$A \cdot B + B \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{D} + B \cdot C \cdot D + C \cdot D =$$

$$A \cdot B + B \cdot (\bar{C} + \cancel{\bar{D} + C} \cdot D) + C \cdot D =$$

$$A \cdot B + B + C \cdot D = B + C \cdot D$$

Esercizio 1: soluzione

A = l'assicurando ha stipulato la polizza n. 19

B = l'assicurando è sposato

C = l'assicurando è maschio

D = l'assicurando ha meno di 25 anni.

Soluzione ⇨ B + C • D

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. E' sposato

oppure 2. E' un maschio con meno di 25 anni.

Esercizio 1: soluzione

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + C \cdot D + B \cdot \bar{D} =$$

$$= B + CD$$

C,D \ A,B	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

B

CD

L'uso delle mappe consente di trovare facilmente la soluzione ottima

Esercizio 2

- Cinque astronauti A,B,C,D,E sono pronti per una missione. Per definire la lista di coloro che partiranno è necessario soddisfare tutte le seguenti relazioni:
  a) A o B devono necessariamente essere inclusi nella lista, ma non contemporaneamente;
  b) C o E devono essere inclusi nella lista, anche contemporaneamente;
  c) qualora D sia incluso nella lista anche B deve essere incluso nella lista;
  d) A e C possono essere entrambi inclusi o entrambi esclusi dalla lista;
  e) qualora E sia incluso anche C e D lo devono essere.

Esercizio 2: soluzione

A, B, C, D, E sono variabili indipendenti che assumono valore 1 se l'astronauta corrispondente viene prescelto e valore 0 in caso opposto.

Ognuna delle 5 condizioni a, b, c, d, e deve essere verificata indipendentemente e assume valore 1 se i valori assegnati alle variabili indipendenti soddisfano ai vincoli imposti e valore 0 se non soddisfano.

a) A o B devono necessariamente essere inclusi nella lista, ma non contemporaneamente;

$a = a(A,B) = \bar{A}B + A\bar{B}$ (a=1 se A=1 e B=0 oppure A=0 e B=1)

b) C o E devono essere inclusi nella lista, anche contemporaneamente;

$b = b(C,E) = C + E$ (b=1 se C=1 oppure E =1)

Esercizio 2: soluzione

c) qualora D sia incluso nella lista anche B deve essere incluso nella lista;

$c = c(D,B) = DB + \bar{D}$ (c=1 se D=0 oppure D=1 e B=1)

d) A e C possono essere entrambi inclusi o entrambi esclusi dalla lista;

$d=(A,C)= AC + \bar{A}\bar{C}$ (d=1 se A=1 e C=1 oppure A=0 e C=0)

e) qualora E sia incluso anche C e D lo devono essere.

$e=(E,C,D) = ECD + \bar{E}$ (e=1 se E=0 oppure E=1,C=1,D=1)

Esercizio 2: soluzione

Z= (A'B + AB')(C+E)(DB+D')(AC+A'C')(ECD+E')=

(A'BC'+AB'C)(C+E)(DB+D')(ECD+E')=

(A'BC'+AB'C)(CDE+CE')(DB+D')=

(A'BC'D+A'BC'D'+AB'CD') (CDE+CE')=

AB'CD'E'

Esercizio 3

Progettare un circuito logico a 3 ingressi *(A,B,C)* e una uscita *U* che assuma valore 1 quando, all'ingresso, il numero degli 1 supera il numero degli 0. (Circuito di rilevazione di maggioranza)

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\overline{A}BC$

$A\overline{B}C$

$AB\overline{C}$

ABC

$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Esercizio 3: soluzione

$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Esercizio 3: soluzione

Soluzione alternativa:

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$A + B + C$

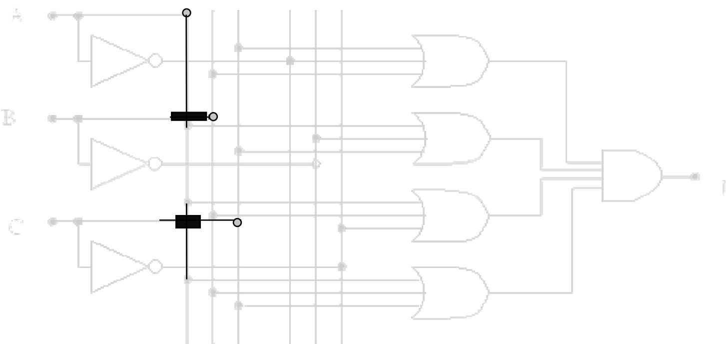
$A + B + \overline{C}$

$A + \overline{B} + C$

$\overline{A} + B + C$

$$U = (\overline{A} + B + C) \bullet (A + \overline{B} + C) \bullet (A + B + \overline{C}) \bullet (A + B + C)$$

Esercizio 3: soluzione



$$U = (\overline{A} + B + C) \bullet (A + \overline{B} + C) \bullet (A + B + \overline{C}) \bullet (A + B + C)$$

Esercizio 4

Progettare un circuito che accetti in ingresso numeri da 0 a 15.

L'uscita deve assumere valore 1 quando il numero è primo.

Soluzione:

- Rappresentare i numeri secondo una codifica binaria (4 bit)
- Scrivere la tabella della funzione
- Inserire tante porte AND quanti sono gli 1 della funzione
- Inserire una porta OR per generare l'uscita