FONDAMENTI DI INFORMATICA B
Soluzione del compito del 16 febbraio 2005
Circuiti logici

Esercizio 1

Enunciare i due teoremi di DeMorgan e dimostrarne almeno uno:

- Nel caso con 2 variabili
- Nel caso generale con N variabili

Soluzione

I teoremi di DeMorgan dicono che:

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{x_1\, x_2}$$

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2} = \overline{x_1 + x_2}$$

estendendo al caso di N variabili:

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + ... + \overline{x_N} = \overline{x_1\, x_2\, x_3 ...\, x_N}$$

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} ... \overline{x_N} = \overline{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N}$$

Scegliamo il primo dei 2 teoremi; la dimostrazione nel caso di 2 variabili pu essere fatta sia usando i diagrammi di Venn sia con l'uso di tabelle: useremo delle tabelle.

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$x_1\, x_2$	$\overline{x_1} + \overline{x_2}$	$\overline{x_1\, x_2}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Possiamo dimostrare il teorema per N variabili per induzione:

$$\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4}+...+\overline{x_N} = \overline{x_1\, x_2}+\overline{x_3\, x_4}+...\overline{x_N} = \overline{x_1\, x_2\, x_3\, x_4}+\overline{...\, x_N} = \overline{x_1\, x_2\, x_3\, x_4 ...\, x_N}$$

Esercizio 2

Data la seguente funzione Booleana di 5 variabili $f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$ effettuare la sintesi ottima a due livelli mediante le mappe di Karnaugh con sole porte NAND e con sole porte NOR. Per ognuna delle due espressioni ottenute disegnare i relativi circuiti.

X4=0

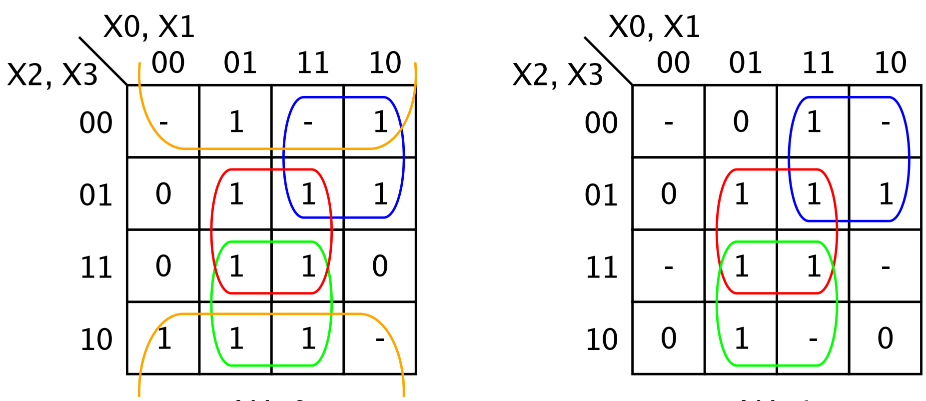
X2, X3 \ X0, X1	00	01	11	10
00	-	1	-	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	1	1	-

X4=1

X2, X3 \ X0, X1	00	01	11	10
00	-	0	1	-
01	0	1	1	1
11	-	1	1	-
10	0	1	-	0

Soluzione

Sintesi con NAND:

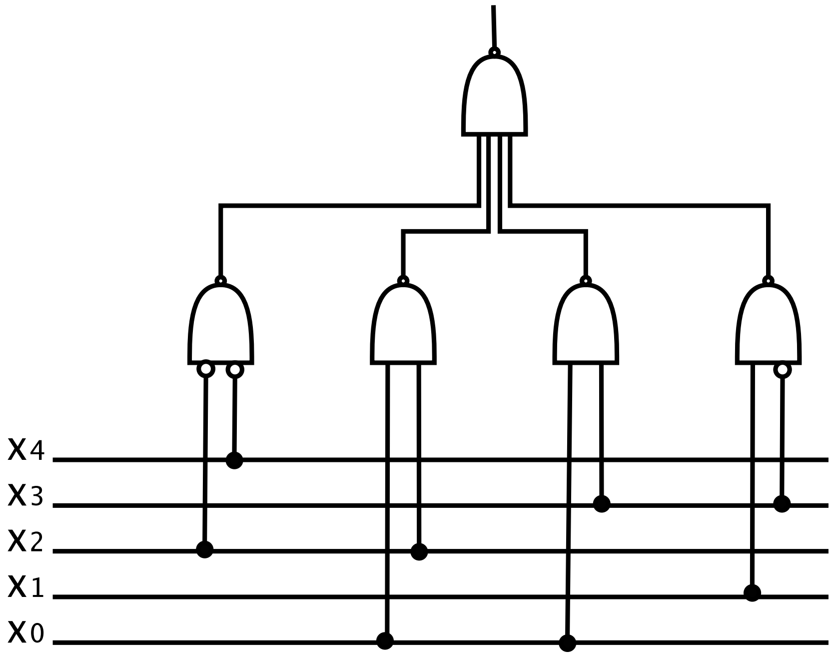


$$\overline{x_2}\,\overline{x_4} + x_0\,x_2 + x_0\,x_3 + x_1\,\overline{x_3}$$

ovvero

$$\overline{\overline{\overline{x_2}\,\overline{x_4}}\;\overline{x_0\,x_2}\;\overline{x_0\,x_3}\;\overline{x_1\,\overline{x_3}}}$$

numero di porte = 5, numero di letterali = 12.



Sintesi con NOR:

X2, X3 \ X0, X1	00	01	11	10
00	-	1	-	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	1	1	-

X4=0

X2, X3 \ X0, X1	00	01	11	10
00	-	0	1	-
01	0	1	1	1
11	-	1	1	-
10	0	1	-	0

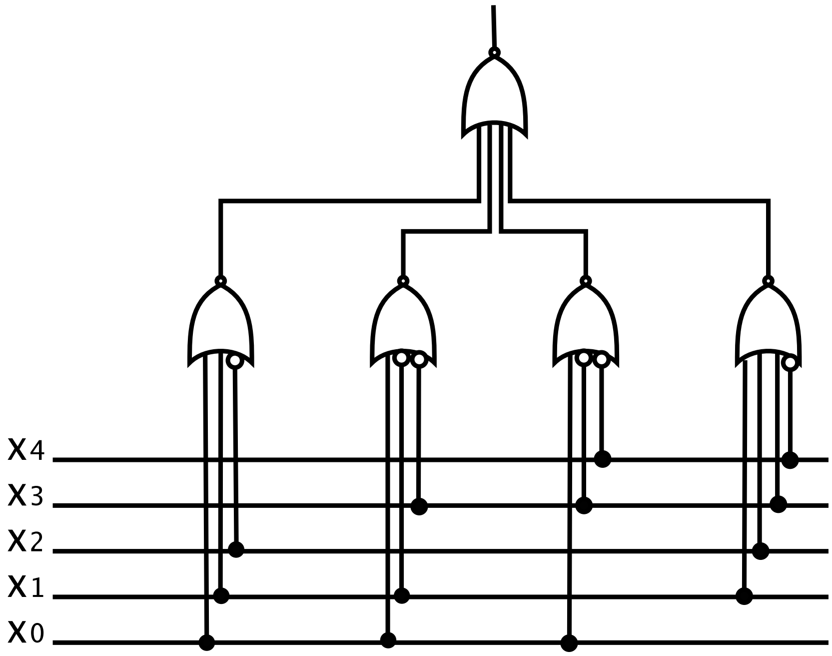
X4=1

$$(x_0+x_1+\overline{x_2})\,(x_0+\overline{x_1}+\overline{x_3})\,(x_0+\overline{x_3}+\overline{x_4})\,(x_1+x_2+x_3+\overline{x_4})$$

ovvero

$$\overline{(\overline{x_0+x_1+\overline{x_2}})+(\overline{x_0+\overline{x_1}+\overline{x_3}})+(\overline{x_0+\overline{x_3}+\overline{x_4}})+(\overline{x_1+x_2+x_3+\overline{x_4}})+}$$

numero di porte = 5, numero di letterali = 17.

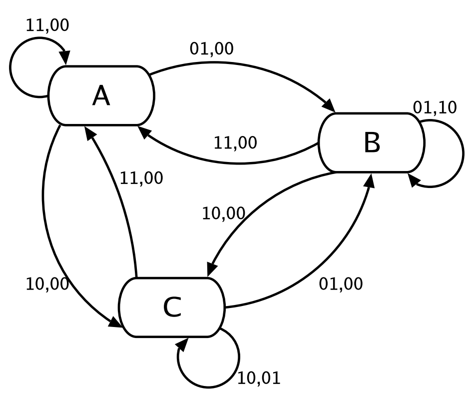


Esercizio 3

Una rete sequenziale sincrona riceve due segnali in ingresso X_1 e X_2 che non possono mai essere a livello 0 contemporaneamente e dispone di due uscite Z_1 e Z_2. Compito della rete segnalare con le uscite Z_1 e Z_2 se e quale dei due segnali di ingresso si mantenuto a 0 per almeno due intervalli consecutivi. Progettare il circuito mediante FF-JK e porte logiche NAND.

Soluzione

Costruiamo il digramma degli stati in questo modo:



Stato A Stato in cui non ho avuto ancora neanche una volta $X_1 = 0$ ne' $X_2 = 0$: ci si arriva con $X_1 = 1$ e $X_2 = 1$.

Stato B Stato in cui $X_1 = 0$ per almeno una volta; se $X_1 = 0$ quando il sistema si trova in questo stato le uscite saranno $Z_1 = 1$ e $Z_2 = 0$.

Stato C Stato in cui $X_2 = 0$ per almeno una volta; se $X_2 = 0$ quando il sistema si trova in questo stato le uscite saranno $Z_1 = 0$ e $Z_2 = 1$.

	$X_1\,X_2$		
Stato	01	10	1
A	B,00	C,00	A,00
B	B,10	C,00	A,00
C	B,00	C,01	A,00

Assegnando A=00, B=01, C=10 otteniamo

	$X_1\,X_2$		
Stato	01	10	1
00	01,00	10,00	00,00
01	01,10	10,00	00,00
10	01,00	10,01	00,00

da cui, considerando la tabella delle transizioni del FF-JK otteniamo:

X_1	X_2	F_1	F_2	F'_1	F'_2	J_1	K_1	J_2	K_2	Z_1	Z_2
0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
0	0	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-
0	0	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-
0	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
0	1	0	0	0	1	0	-	1	-	0	0
0	1	0	1	0	1	0	-	-	0	1	0
0	1	1	0	0	1	-	1	1	-	0	0
0	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
1	0	0	0	1	0	1	-	0	-	0	0
1	0	0	1	1	0	1	-	-	1	0	0
1	0	1	0	1	0	-	0	0	-	0	1
1	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	0	0	0	0	0	-	0	-	0	0
1	1	0	1	0	0	0	-	-	1	0	0
1	1	1	0	0	0	-	1	0	-	0	0
1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-

Possiamo ricavare le seguenti mappe di Karnaugh:

F_1,F_2 \ X_1,X_2	00	01	11	10
00	-	0	0	1
01	-	0	0	1
11	-	-	-	-
10	-	-	-	-

$J_1 = \overline{X_2}$

F_1,F_2 \ X_1,X_2	00	01	11	10
00	-	-	-	-
01	-	-	-	-
11	-	-	-	-
10	-	1	1	0

$K_1 = X_2$

F_1,F_2 \ X_1,X_2	00	01	11	10
00	-	1	0	0
01	-	-	-	-
11	-	-	-	-
10	-	1	0	0

$J_2 = \overline{X_1}$

F_1,F_2 \ X_1,X_2	00	01	11	10
00	-	-	-	-
01	-	0	1	1
11	-	-	-	-
10	-	-	-	-

$K_2 = X_1$

F_1,F_2 \ X_1,X_2	00	01	11	10
00	-	0	0	0
01	-	1	0	0
11	-	-	-	-
10	-	0	0	0

$J_1 = \overline{X_1}\,F_2$

F_1,F_2 \ X_1,X_2	00	01	11	10
00	-	0	0	0
01	-	0	0	0
11	-	-	-	-
10	-	0	0	1

$K_1 = \overline{X_2}\,F_1$

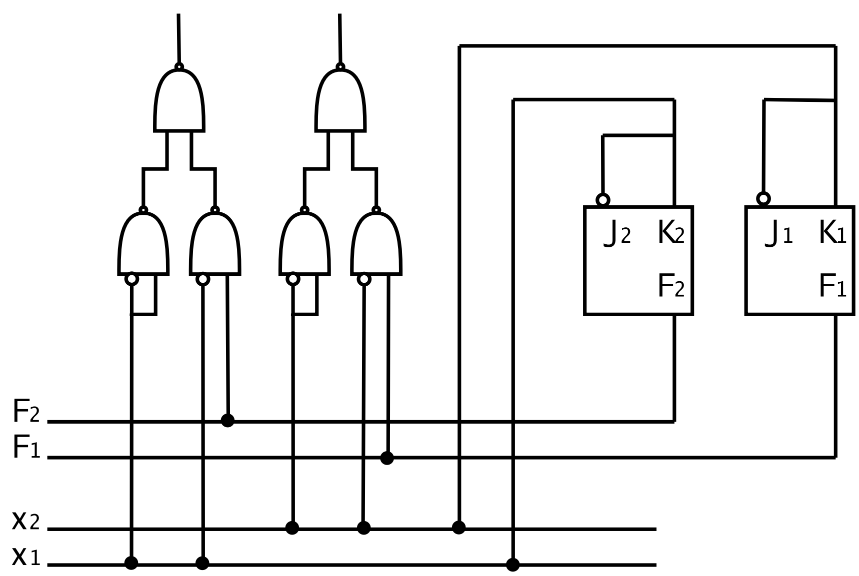
Essendo

$$Z_1 = \overline{x_1}\,F_2 = \overline{x_1}\,F_2 + 0 = \overline{\overline{\overline{x_1}\,F_2 + 0}} = \overline{\overline{\overline{x_1}\,F_2}/,\overline{0}} = \overline{\overline{\overline{x_1}\,F_2}\,1} = \overline{\overline{\overline{x_1}\,F_2}/,\overline{x_1\,\overline{x_1}}}$$

ed anche

$$Z_2 = \overline{x_2}\,F_1 = \overline{x_2}\,F_1 + 0 = \overline{\overline{\overline{x_2}\,F_1 + 0}} = \overline{\overline{\overline{x_2}\,F_1}\,\overline{0}} = \overline{\overline{\overline{x_2}\,F_1}\,1} = \overline{\overline{\overline{x_2}\,F_1}\,\overline{x_2\,\overline{x_2}}}$$

otteniamo il seguente circuito:



J2
K2
F2
J1
K1
F1
F2
F1
x2
x1