TUTORATO DI CONTROLLI AUTOMATICI A

DOMANDE ED ESERCIZI

Dario Lodi Rizzini

Esesrcizio 1

Determinare la scomposizione in fratti semplici della seguente funzione di trasferimento.

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)^2} \tag{1}$$

Risposta - La scomposizione in fratti semplici è importante per varie ragioni, per esempio perchè:

- è necessaria per antitrasformare la G(s) essendo generalmente tabulate le funzioni più semplici;
- consente di determinare i coefficienti della combinazione dei modi del sistema.

Passiamo all'esercizio: abbiamo "fratto" per ogni polo di G(s) tenendo conto della molteplicità, come indicato nel seguito.

$$G(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2} \tag{2}$$

Il calcolo dei coefficienti A, B, C può essere fatto in vari modi. Per esempio mettendo a denominatore comune ed imponendo l'identità dei polinomi al numeratore. Questa soluzione richiede però calcoli abbastanza lunghi. Esiste una relazione che consente di abbreviare il procedimento. Sia data una funzione definita sui complessi a valori complessi esprimibile come rapporto di polinomi e avente un polo p avente molteplicità m. Scriviamo lo sviluppo in fratti (solo i termini relativi a p).

$$\frac{P(s}{Q(s)(s-p)^m} = \frac{K_1}{s-p} + \frac{K_2}{(s-p)^2} + ... + \frac{K_m}{(s-p)^m} + ... \tag{3}$$

Allora per $i = 1, .., m$:

$$K_i = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{m-i}}{ds^{m-i}}(s-p)^m \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{4}$$

Applicando la 4 allora:

$$A = (s+2) \cdot G(s)|_{s=-2} = \frac{s+4}{(s+3)^2}|_{s=-3} = 2 \tag{5}$$

$$C = (s+3)^2 \cdot G(s)|_{s=-3} = \frac{s+4}{(s+2)}|_{s=-3} = 1 \tag{6}$$

$$B = \frac{d}{ds}(s+3)^2 \cdot G(s)|_{s=-3} = \frac{(s+2)-(s+4)}{(s+2)^2}|_{s=-3} = -2 \tag{7}$$

In realtà avremmo potuto evitare il calcolo di B. Una conseguenza del teorema dei residui infatti ci permette di asserire che, detti m ed n i gradi del numeratore e del denominatore,

- se $n = m + 1$ allora la somma dei residui è 1;
- se $n > m + 1$ allora la somma dei residui è 0;

I residui sono formalmente i coefficienti dei termini di ordine -1 della serie di Laurent sviluppata in corrispondenza dei poli (vedi seguito). Nel caso in esame sono quindi A e B; essendo $n = 3$ ed $m = 1$ allora $A + B = 0$ come si è poi verificato.

Giustificazione della relazione 4 - Proviamo a giustificare in modo molto intuitivo la formula usata in precedenza. Per farlo ci riconduciamo ad alcune delle proprietà delle funzioni $f : C \to C$. Comnciamo con qualche definizione. La f sarà detta *o*lomorfa o regolare se derivabile in senso complesso (si accetti in modo intuitivo questa definizione). La f sarà detta *a*nalitica se è sviluppabile in serie di potenze. Una prima proprietà di cui tener conto è la seguente: una funzione è analitica *s*e e solo se è olomorfa.

Possiamo considerare allora una funzione olomorfa $G(s)$ su tutto C tranne che in corrispondenza di un numero finito di singolarità isolate; per esempio la 1 è olomorfa tranne che in -2 e -3. Una tale funzione può essere sviluppata in serie di Laurent in ogni punto; ci interessa in particolare lo sviluppo in corrispondenza delle singolarità. Riprendendo l'esempio sviluppiamo in -3.

$$G(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i (s+3)^i \tag{8}$$

Se i coefficienti a_i della serie con $i < 0$ fossero tutti nulli allora la $G(s)$ sarebbe analitica in tale punto. Se esiste un intero $m < 0$ tale per cui $a_m \neq 0$ e $a_i = 0 \; \forall i < m$ allora la singolarità è detta polo di ordine m. Diversamente si parla di singolarità essenziale.

Chiaramente -3 è un polo di ordine 2 e dunque la serie di Laurent avrà la forma seguente.

$$G(s) = \frac{a_{-2}}{(s+3)^2} + \frac{a_{-1}}{s+3} + ... \tag{9}$$

Chiarmente $(s+3)^2 G(s)$ è una funzione analitica e per ottenere a_{-2} basta sostituire $s = -3$ in 8

$$\begin{aligned} (s+3)^2 \cdot G(s) &= (s+3)^2 \sum_{i=-2}^{+\infty} a_i (s+3)^i && (10) \\ &= \sum_{i=-2}^{+\infty} a_i (s+3)^{i+2} && (11) \\ &= a_{-2} + \sum_{i=-1}^{+\infty} a_i (s+3)^{i+2} && (12) \end{aligned}$$

da cui

$$(s+3)^2 \cdot G(s)|_{s=-3} = a_{-2} \tag{13}$$

Per ottenere il termine di indice -1 si può derivare 12.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}((s+3)^2 \cdot G(s)) &= \frac{d}{ds}(a_{-2} + \sum_{i=-1}^{+\infty} a_i (s+3)^{i+2}) && (14) \\ &= \sum_{i=-1}^{+\infty} a_i (s+3)^{i+1} && (15) \\ &= a_{-1} + \sum_{i=0}^{+\infty} a_i (s+3)^{i+1} && (16) \end{aligned}$$

Come si vede basta ancora una volta sostituire. Iterando il procedimento si verifica la formula finale.

Asintoti parabolici

Più volte mi sono state poste domande riguardo alla ricerca di asintoti dei diagrammi di Nyquist di funzioni di risposta armonica aventi poli nell'origine. Il caso con un unico polo è abbastanza semplice da studiare, esiste anche una relazione semplice per l'ascissa dell'asintoto.

In generale per studiare queste funzioni per $\omega \to 0$ occorre separare parte reale e parte immaginaria, far tendere entrambe a zero e vedere che cosa emerge. Questa operazione è spesso lunga e durante una prova potrebbe richiedere troppo tempo. Lo scopo di formule approssimanti risiede appunto in questo, ossia nel risparmiare tempo.

Caso Σ di tipo 1. Come anticipato è qualcosa che già a lezione avete visto. Ci riferiamo al caso di sistemi avente la forma seguente:

$$L(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ...}{b_1 s + b_2 s^2 + ...} \tag{17}$$

La $L(j\omega)$ può essere approssimata con i termini di grado inferione: per $\omega \to 0$ infatti più k è grande più ω^k è trascurabile. Mettendo insieme tutte queste consigerazioni allora

$$L(j\omega) \simeq K_1 \left(\frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_2^2} + j \frac{b_0}{a_1 \omega} \right) \tag{18}$$

Quindi la parte immaginaria tende all'infinito mentre quella reale diventa la coordinata dell'asintoto. Da qui la formula riportata nella slide 3.30 vista a lezione.

Caso Σ di tipo 2. Vogliamo provare a ricavare una relazione analoga per capire il comportamento dei sistemi di tipo 2, ossia quelli nella forma:

$$L(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ...}{a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 ...} \tag{19}$$

Facciamo qualche passaggio cominciando a trascurare i termini di grado superiore al secondo (dopo aver raccolto un s^2 al denominatore) e sostituendo $s = j\omega$.

$$\begin{aligned}
L(j\omega) &\simeq \frac{(b_0 - b_2\omega^2) + j\omega b_1}{-\omega^2((a_2 - a_4\omega^2) + ja_3\omega)} && (20)\\
&= \frac{((b_0 - b_2\omega^2) + j\omega b_1) \cdot ((a_2 - a_4\omega^2) - ja_3\omega)}{-\omega^2((a_2 - a_4\omega^2)^2 + a_3^2\omega^2)} && (21)\\
&= \frac{(a_0 - a_2\omega^2)(b_2 - b_4\omega^2) + a_3 b_1 \omega^2}{-\omega^2[a_2^2 + (a_3^2 - 2a_2a_4)\omega^2 + a_4^2\omega^4]} + && (22)\\
&\quad j \frac{\omega[a_1(b_2 - b_4\omega^2) - b_3(a_0 - a_2\omega^2)]}{-\omega^2[a_2^2 + (a_3^2 - 2a_2a_4)\omega^2 + a_4^2\omega^4]} && (23)
\end{aligned}$$

Sviluppiamo l'espressione trascurando i termini di quarto ordine e sostituendo $t = 1/\omega$.

$$
\begin{aligned}
Re(L) &\simeq -\frac{a_2b_0 + (a_3b_1 - a_2b_2 - a_4b_0)\omega^2}{w^2(a_2^2 + (a_3^2 - 2a_2a_4)\omega^2)} && (24)\\
&\simeq -\frac{a_2b_0 + (a_3b_1 - a_2b_2 - a_4b_0)\omega^2}{w^2a_2^2} && (25)\\
&= -\frac{b_0}{a_2}t^2 - \frac{a_3b_1 - a_2b_2 - a_4b_0}{a_2^2} && (26)\\
Im(L) &\simeq -\frac{\omega[(a_2b_1 - a_3b_0) + (a_3b_2 - a_4b_1)\omega^2]}{\omega^2(a_2^2 + (a_3^2 - 2a_2a_4)\omega^2)} && (27)\\
&\simeq -\frac{(a_2b_1 - a_3b_0)}{a_2^2\omega} && (28)\\
&= -\frac{(a_2b_1 - a_3b_0)}{a_2^2}t && (29)
\end{aligned}
$$

Per comdità siano $p = Re(L)$ e $q = Im(L)$. L'asintoto parabolico in forma cartesiana sarà allora:

$$
\begin{aligned}
p &= -\frac{b_0}{a_2}\left(-\frac{a_2^2}{(a_2b_1 - a_3b_0)}q\right)^2 - \frac{a_3b_1 - a_2b_2 - a_4b_0}{a_2^2} && (30)\\
&= -\frac{a_2^3b_0}{(a_2b_1 - a_3b_0)^2}q^2 - \frac{a_3b_1 - a_2b_2 - a_4b_0}{a_2^2} && (31)
\end{aligned}
$$

Il diagramma tende ad avvicinarsi alla parabola di equazione 31. Come si può vedere la relazione non è delle più semplici da maneggiare e questa è la ragione per cui non viene normalmente fornita dai testi. Formule analoghe si possono ottenere anche per sistemi di tipo 3 e oltre, ma non ne vale la pena.