

Teoria dei Veicoli Autonomi

Paolo Medici
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione di Parma

18 gennaio 2013

This is only a preliminary italian version. English version will be ready as soon as possible (after the completion of the italian version, in order to not have two different version to update), but I hope that mathematics is an universal language and easy to be understood (for the moment).

È possibile trovare l'ultima versione di questo documento a <http://vislab.it/medici>. Tutto il materiale di Teoria dei Veicoli Autonomi è rilasciato sotto licenza Creative Commons 3.0. Il testo completo della licenza è disponibile, in inglese, alla pagina <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>.

This document is a brief introduction to the fundamentals of vehicle dynamic and control. You can find the latest version of this document at <http://vislab.it/medici>. This work may be distributed and/or modified under the conditions of the Creative Commons 3.0. The latest version of the license is in <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>.

Prerequisito per usare questo libro è buona parte della teoria statistica e di filtraggio bayesiano disponibile in “Elementi di Analisi per Visione Artificiale”, sempre disponibile a <http://vislab.it/medici>.

Copyright 2006-2013 Paolo Medici

Capitolo 1

Vehicle Dynamic

1.1 Fondamenti del moto dei veicoli

In generale il veicolo esegue una traiettoria circolare, il quale centro di rotazione istantaneo (*ICR*) è il punto di incontro delle perpendicolari ai vettori di velocità delle singole ruote. Se tuttavia l'angolo di deriva (*slip angle* β) è basso (solitamente questo vuole dire velocità del veicolo bassa) e il passo del veicolo L (distanza tra i due assi delle ruote) piccolo rispetto al raggio di curvatura R , il veicolo segue una traiettoria circolare dove il vettore velocità di ogni singola ruota coincide con la ruota stessa ($\alpha_r = 0$ e $\alpha_f = 0$): il centro di rotazione è l'incrocio delle perpendicolari alle ruote stesse (fig. 1.1).

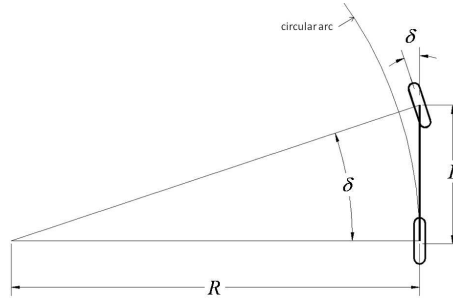


Figura 1.1: Simplified model for a two-axle vehicle: geometric Bicycle Model. Modello semplificato del veicolo.

Da semplici considerazioni geometriche è possibile collegare il raggio di curvatura κ all'angolo che assumono le ruote sterzanti del veicolo δ (in diverse pubblicazioni tale angolo è indicato con ψ):

$$\kappa(s) = \frac{\tan \delta(s)}{L} \quad (1.1)$$

Tale angolo è chiamato *Ackerman Angle*, *vehicle's steering angle* o *wheel angle*. Tale relazione introduce il modello del biciclo (fig. 1.1), dove le 4 ruote dell'auto vengono compresse in due ruote solamente (*single-track model*), compattando le ruote dello stesso asse.

È da notare che normalmente il raggio di curvatura è approssimato perpendicolare nel centro di massa nel caso di modello dinamico e all'asse posteriore nel caso del modello cinematico.

In entrambi i casi, la connessione tra l'angolo dello sterzo δ_w e curvatura κ potrebbe essere non lineare (esiste una relazione biunivoca che lega δ con δ_w , e per come è costruito lo sterzo di Ackermann tale relazione normalmente è lineare) anche nel caso semplice del modello del biciclo.

Nel caso di angoli piccoli è facile trovare in letteratura [Won01, Wid02] una versione linearizzata dell'equazione 1.1:

$$\delta(s) \approx \frac{L}{R} \quad (1.2)$$

Un'altra versione è quella del modello di veicolo bitraccia (figura 1.2) dove l'angolo delle due ruote sterzanti vale

$$\tan \delta_o(s) = \frac{L}{R + \frac{B}{2}} \quad \tan \delta_i(s) = \frac{L}{R - \frac{B}{2}} \quad (1.3)$$

dove B è la distanza delle ruote sullo stesso asse, δ_o è l'angolo della ruota esterna e δ_i l'angolo della ruota interna alla curva.

L'equazione 1.3 può essere riscritta come

$$\cot \delta_o(s) - \cot \delta_i(s) = \frac{B}{L} \quad (1.4)$$

Questa condizione è nota come *Ackerman condition* [Jaz09] o *Jeantaud condition*.

Per semplicità normalmente si usa l'equazione 1.1 che fornisce il valor medio dei due angoli, ma la deviazione dovuta a questa approssimazione può essere non trascurabile. Se si vuole tenere conto del modello completo (*double track model*) l'equazione 1.1 può essere riscritta in termine dell'angolo interno:

$$\kappa = \frac{2 \tan \delta_i}{2L + B \tan |\delta_i|} \quad (1.5)$$

Se si considera il legame tra δ_w e δ_i , il fatto che il centro di rotazione è supposto sull'asse posteriore, risulta evidente come sia difficile legare δ_w a κ .

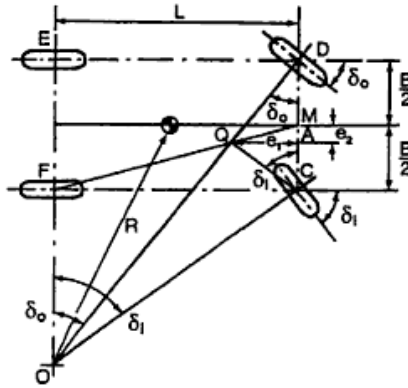


Figura 1.2: Modello "bitraccia" del veicolo. Steering geometry for a road vehicle (Wong)

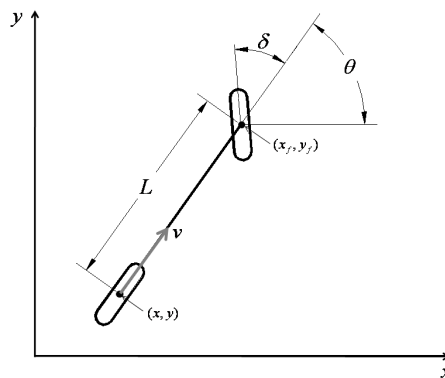


Figura 1.3: Kinematic Bicycle Model. Modello semplificato del veicolo.

1.1.1 Cinematica dei veicoli

Uno dei modelli più semplici da capire è quello della *simple car* [LaV06] (un elenco dei sinonimi di tale modello è elencato sotto). Verrà utilizzato il modello cinematico del biciclo, lasciando la trattazione del modello dinamico alla sezione successiva. Immaginiamo il veicolo come un corpo rigido che si muove su un piano e rappresentiamo lo stato del veicolo come $q = (x, y, \theta)$.

Definiamo s lo spazio percorso sull'arco di circonferenza dal centro di massa del veicolo (o del dentro dell'asse posteriore), $\theta(s)$ è l'angolo che assume il veicolo (*heading*) rispetto al sistema di riferimento, $\kappa(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{d\theta}{ds}$ la variazione della direzione del veicolo θ ovvero la curvatura in un punto dato che cambia in base alla posizione lineare $\kappa(s) = \kappa_0 + \sigma s$. La *sharpness* $\sigma = \frac{d\kappa}{ds}$ è la variazione della curvatura rispetto alla distanza s percorsa sulla curva. κ_0 è la curvatura iniziale, mentre θ_0 è l'angolo iniziale. Siccome si suppone il veicolo a velocità costante, usare s o t risulta indifferente (a meno di un fattore moltiplicativo $ds = vdt$).

Per piccole variazioni di spazio (o tempo) il veicolo (il centro di massa/asse centrale posteriore) si muoverà nella direzione in cui è orientato.

Quello che viene chiamato modello cinematico del biciclo, o *Ackermann kinematic model*, o modello *CC car* (*Continuous Curvature Car* [FS04] o anche *continuous-steering car* [LaV06]), usando la 1.1, è un sistema differenziale:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta \\ \dot{y} &= \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \kappa \\ \dot{\kappa} &= \sigma\end{aligned}\tag{1.6}$$

dove la notazione indica la derivata dello spazio percorso ds . Esplicitando $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \kappa(s) = \kappa_0 + \sigma s\tag{1.7}$$

e conseguentemente

$$\theta(s) = \frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s + \theta_0\tag{1.8}$$

È infine da notare che $\dot{\kappa}$ secondo l'equazione 1.1 vale

$$\sigma = \dot{\kappa} = \frac{\dot{\delta}}{L \cos^2 \delta}\tag{1.9}$$

È chiaro pertanto che l'aver $\dot{\delta}$ costante non basta per avere σ costante, se non per δ piccoli.

1.1.2 Calcolo della traiettoria dal punto di vista computazionale

Come risulta evidente, mantenere nelle equazioni θ_0 e κ_0 complica il problema dal punto di vista computazione, e in ogni caso l'integrale $\int \sin(s^2)ds$ non è fornito normalmente da un calcolatore ma bisogna appoggiarsi a una funzione esterna, meno efficiente. Per quanto riguarda l'angolo iniziale θ_0 con cui il veicolo è orientato, questo rappresenta una pura rotazione del mondo e conseguentemente tale angolo può essere sempre sottointeso (il risultato si ricava anche dalle formule di addizione trigonometriche di seno e coseno).

Supponiamo di percorrere distanze s abbastanza piccole da poter fare l'espansione di Taylor del seno e del coseno delle equazioni 1.6 tali che:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta(s) = 1 - \theta(s)^2/2 + \theta(s)^4/24 + O(5) \\ \dot{y} &= \sin \theta(s) = \theta(s) - \theta(s)^3/6 + \theta(s)^5/120 + O(5)\end{aligned}\tag{1.10}$$

da cui è possibile ottenere infine gli integrali come somma di polinomi. Il non inserire θ_0 nell'espansione di Taylor permette di poter considerare qualsiasi angolo iniziale senza perdere ulteriormente precisione.

Combinando la precedente con l'equazione 1.8 si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta(s) = 1 - (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^2/2 + (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^4/24 + O(5) \\ \dot{y} &= \sin \theta(s) = \frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s - (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^3/6 + (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^5/120 + O(5)\end{aligned}\tag{1.11}$$

la cui soluzione è un integrale di polinomi.

Infine è possibile anche una forma un po' più chiusa dell'equazione, usata frequentemente in letteratura. Se si suppone di avere oltre a $\theta_0 = 0$ anche la curvatura iniziale nulla $\kappa_0 = 0$ si ha la classica equazione della clotoide espressa con gli integrali di Fresnel:

$$\begin{aligned}x(s) &= \int \cos(\frac{1}{2}\sigma s^2)ds = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}C(\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}s) \\ y(s) &= \int \sin(\frac{1}{2}\sigma s^2)ds = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}S(\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}s)\end{aligned}\tag{1.12}$$

dove $C(S)$ e $S(s)$ sono le funzioni coseno e seno di Fresnel, definite come:

$$\begin{aligned}S(x) &= \text{fresnel}_s(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt \\ C(x) &= \text{fresnel}_c(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi}{2}t^2)dt\end{aligned}\tag{1.13}$$

In questo modo risulta possibile usare le clotoidi solo come funzioni che collegano linee a circonferenze (curvatura iniziale zero), circonferenze a linee (invertendo gli estremi di integrazione, curvatura finale zero), ma non è possibile collegare circonferenze a circonferenze, tantomeno clotoidi a clotoidi.

Per completezza, mantenere κ_0 porterebbe alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\int \cos(\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)ds &= \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\cos \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} C \left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \right) + \sin \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} S \left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \right) \right) \\ \int \sin(\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)ds &= \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\cos \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} S \left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \right) - \sin \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} C \left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \right) \right)\end{aligned}\tag{1.14}$$

Come ultima nota, esistono delle approssimazioni con funzioni razionali all'equazione della clotoide[Hea85].

1.1.3 Movimento senza variazioni di curvatura

Per completezza valutiamo quale sarebbero le equazioni del veicolo nel caso in cui le variazioni di curvatura non siano presenti o siano comunque trascurabili.

In questo caso le equazioni del moto sarebbero

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \theta_0 + \kappa s \\ \dot{x} &= \cos \theta(s) = \cos(\theta_0 + \kappa s) \\ \dot{y} &= \sin \theta(s) = \sin(\theta_0 + \kappa s)\end{aligned}\tag{1.15}$$

con κ costante. In questo caso gli integrali sono conosciuti e valgono:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int \cos \theta(s) ds = \frac{\sin(\theta_0 + \kappa \Delta s) - \sin(\theta_0)}{\kappa} \\ \Delta y &= \int \sin \theta(s) ds = \frac{\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0 + \kappa \Delta s)}{\kappa}\end{aligned}\tag{1.16}$$

o imponendo $\theta_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int \cos \theta(s) ds = \frac{\sin(\kappa \Delta s)}{\kappa} \\ \Delta y &= \int \sin \theta(s) ds = \frac{1 - \cos(\kappa \Delta s)}{\kappa}\end{aligned}\tag{1.17}$$

Nel caso in cui $\kappa = 0$ il sistema si riconduce al classico caso di moto rettilineo uniforme

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int \cos \theta_0 ds = \cos \theta_0 \Delta s \\ \Delta y &= \int \sin \theta_0 ds = \sin \theta_0 \Delta s\end{aligned}\tag{1.18}$$

1.1.4 Trasformazioni di coordinate

Le equazioni del movimento del centro di massa (o dell'asse posteriore) nel tempo valgono:

$$\begin{aligned}dx &= v \cos \theta dt \\ dy &= v \sin \theta dt \\ d\theta &= r dt\end{aligned}\tag{1.19}$$

Supponendo che all'inizio $\theta_0 = 0$ e che nell'istante di tempo della simulazione lo *yawrate* r rimanga costante, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v}{r} \sin rt \\ y(t) &= \frac{v}{r} (1 - \cos rt) \\ \theta(t) &= rt\end{aligned}\tag{1.20}$$

Il cambio di sistema di riferimento pertanto si può modellare come puro spostamento e pura rotazione. Chiaramente il sistema a limite $r \rightarrow 0$ tende a un moto rettilineo uniforme.

Abbiamo a questo punto a disposizione un centro di rotazione (x_r, y_r) istantaneo localizzato nel sistema di riferimento corrente, e un angolo ϑ di variazione dello yaw. Prendiamo la matrice di rotazione, in modo da capire dove il generico punto (x, y) del mondo finisce rispetto al preesistente sistema di riferimento:

$$\begin{aligned}x' &= \cos \vartheta (x - x_r) - \sin \vartheta (y - y_r) + x_r = \cos \vartheta x - \sin \vartheta y + x_r (1 - \cos \vartheta) + y_r \sin \vartheta \\ y' &= \sin \vartheta (x - x_r) + \cos \vartheta (y - y_r) + y_r = \sin \vartheta x + \cos \vartheta y + y_r (1 - \cos \vartheta) - x_r \sin \vartheta\end{aligned}\tag{1.21}$$

1.2 Dynamic Vehicle Model

Il modello del biciclo semplificato non tiene conto della dinamica e delle forze laterali effettive che incidono sul veicolo. Quello presentato finora viene chiamato Modello Cinematico del veicolo. Ora viene presentato il modello dinamico. L'obiettivo è quello di ottenere un modello dinamico del veicolo, che poi linearizzato, fornisca una stima leggermente più accurata del moto del veicolo.

A velocità elevate, l'ipotesi che il vettore forza di ogni ruota sia nella direzione della ruota stessa, non è più valida [Raj06]. In questo caso, invece di un modello cinematico, deve essere introdotto un modello dinamico, il quale ha delle variabili interne in più con una loro dinamica dipendente dal tempo.

In figura 1.4, δ è l'angolo delle ruote sterzanti, \mathbf{v} il vettore velocità del centro di massa (con le sue due componenti proiettate sull'asse del veicolo e perpendicolari ad esso), β è l'angolo di deriva (lo slip angle, l'angolo tra il vettore velocità e la direzione del veicolo) del centro di massa, e α_f e α_r l'angolo di deriva delle singole ruote (angolo tra il vettore velocità nelle ruote e l'angolo delle ruote stesso).

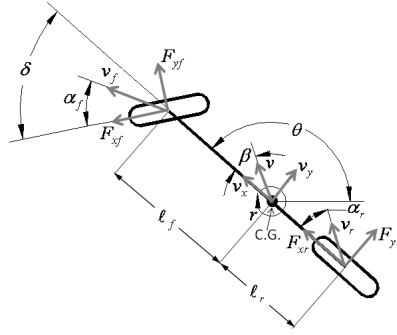


Figura 1.4: Dynamic Bicycle Model

1.2.1 Ackermann Steering Model con deriva: Steady-State curve

Il modello di veicolo a 3 parametri acquisisce il parametro β . La variabile β è la nuova variabile interna dipendente dal tempo e dal moto. Gli angoli α_r e α_f sono gli angoli che formano il vettore velocità delle singole ruote rispetto all'asse del veicolo. Istantaneamente il veicolo esegue una rotazione centrato nel punto di incontro della perpendicolare di tali velocità.

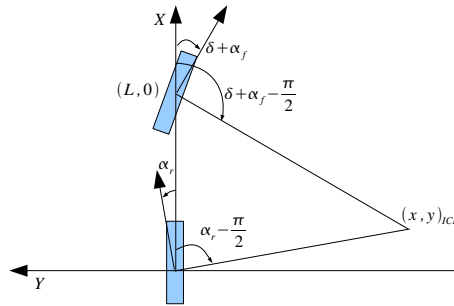


Figura 1.5: Centro di rotazione istantaneo.

Dall'analisi geometrica della figura 1.5 si evince che:

$$x_{ICR} = \frac{L}{1 - \cot \alpha_r \tan(\alpha_f + \delta)} \quad y_{ICR} = -\cot \alpha_r x_{ICR} \quad (1.22)$$

Eseguendo diverse semplificazioni (forzando per esempio R perpendicolare al veicolo nel centro di massa) si ottiene

$$\delta \simeq \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r \quad (1.23)$$

L'angolo δ , necessario per affrontare una curva, ora è funzione non solo del raggio di curvatura R (misurato questa volta nel centro di massa), ma anche degli angoli di deriva delle singole ruote. Gli angoli α_f e α_r sono funzioni dalle forze laterali che agiscono sui rispettivi pneumatici.

L'angolo β viene chiamato angolo di deriva (*slip angle*) e rappresenta l'angolo fra l'asse del veicolo e la velocità di avanzamento \mathbf{v} :

$$\beta = \arctan \left(\frac{l_r}{\sqrt{R^2 - l_r^2}} \right) \quad (1.24)$$

Le equazioni del moto diventano con questo angolo aggiuntivo $\gamma = \delta + \beta$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \gamma \\ \dot{y} &= \sin \gamma \\ \dot{\theta} &= \frac{\cos \beta}{L} \tan \delta \end{aligned} \quad (1.25)$$

La forza centrifuga applicata alla vettura $F_c = mR\dot{\theta}^2 = m\frac{v_x^2}{R}$ sul centro di massa deve essere bilanciata dalla risposta laterale dei pneumatici [Gil92, Wid02]:

$$F_{yf} + F_{yr} = F_c = m\frac{v_x^2}{R} \quad (1.26)$$

e per la conservazione del momento angolare:

$$F_{yf}l_f = F_{yr}l_r \quad (1.27)$$

la cui soluzione fornisce:

$$F_{yr} = m \frac{l_f v_x^2}{LR} \quad F_{yf} = m \frac{l_r v_x^2}{LR} \quad (1.28)$$

In generale la risposta dei pneumatici (la *Tyre Stiffness*) si modella con una espansione in serie di Taylor (questi valori sono empirici, dipendenti da tantissimi parametri):

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \frac{F_{yf}}{2C_{\alpha f}} \\ \alpha_r &= \frac{F_{yr}}{2C_{\alpha r}} \end{aligned} \quad (1.29)$$

esplicitando il contributo fornito da due ruote per asse (normalmente si vede questa relazione senza il 2 a denominatore, incorporato nella costante C).

Saltando la trattazione (si può trovare in tantissimi articoli, per esempio in [YRG03]) che solitamente viene fatta in questa fase, si arriva ad ottenere un sistema del tipo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\delta(t) \quad (1.30)$$

dove vengono linearizzate tutte le componenti. Tale modello è valido per velocità elevate ma per angoli di deriva piccoli e per regioni lineari di risposta del pneumatico.

È da notare che alcuni articoli mostrano come sia possibile usare la velocità laterale v_y come parametro interno, piuttosto che β .

1.2.2 Steady-State: SottoSterzo e Sovrasterzo

È possibile sviluppare un modello cinematico leggermente migliore, tenendo conto della dinamica del veicolo, ma trascurando l'angolo di deriva (modello *Steady-State*). In letteratura [Wid02, Raj06, Won01] viene mostrato come arrivare all'equazione della curvatura 1.1 in presenza di sottosterzo o sovrasterzo dovuto all'interazione tra le ruote e la strada. Dall'equazione 1.23 si ottiene

$$\delta(s) = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{L}{R} + K_V \frac{v_x^2}{R} \quad (1.31)$$

o

$$\kappa(s) = \frac{\delta(s)}{L + K_V v_x^2} \quad (1.32)$$

dove si linearizzano i contributi introdotti dalla velocità v_x alla traiettoria eseguita dal veicolo. Il coefficiente K_V è il gradiente di sottosterzo, con $K_V > 0$ sottosterzante, $K_V = 0$ neutro e $K_V < 0$ sovrasterzante.

Per i veicoli sovrasterzanti è anche possibile stimare una velocità critica, sopra la quale il veicolo diventa ingovernabile:

$$v_{crit} = \sqrt{-\frac{L}{K_V}} \quad (1.33)$$

1.2.3 Determinazione dei parametri del veicolo

Dall'equazione 1.32 e dal fatto che $\delta(s) = f(\delta_w(s))$ dove solitamente f non è conosciuta in forma chiusa, si può dire che esiste una equazione generica k tale che

$$\kappa(s) = k(\delta_w(s), v_x(s)) \quad (1.34)$$

tale equazione può essere generata con spline o con espansione in serie, partendo per esempio dalle informazioni prodotte da un sensore di yaw-rate $r = \partial\theta/\partial t$.

Sia r il valore di yaw-rate¹ tale che $t = \frac{2\pi}{r}$ tempo necessario per eseguire una rivoluzione completa su una circonferenza di perimetro $s = 2\pi R = v_x t = \frac{2\pi}{r} v_x$ per cui

$$\kappa = \frac{r}{v_x} \quad r = \kappa v_x \quad (1.35)$$

ovvero, in forma differenziale:

$$k(\delta_w, v_x) = \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{v_x} \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (1.36)$$

¹È da notare che r sono rad/s , mentre k sono rad/m

Siccome tale relazione vale sempre, è sempre possibile stimare r dalla conoscenza di κ , spostando il problema della conoscenza di κ dalla conoscenza di r .

Dall'equazione 1.35 e da 1.32 è possibile calcolare il sistema lineare omogeneo

$$Lr + K_{us}v_x^2r - m_0v_x - \delta_w m_1 v_x - \delta_w^3 m_3 v_x = 0 \quad (1.37)$$

avendo usando una espansione in serie di Taylor $\delta = -\tan \delta_0 + \delta_w m_1 + \delta_w^3 m_3$. che minimizzato ritorna i parametri richiesti

Il secondo metodo per stimare κ si basa sulla considerazione che anche l'accelerazione laterale $a_y = \frac{v_x^2}{R} = v_x^2 k$ è funzione della curvatura:

$$k(\delta_w, v_x) = \frac{a_y}{v_x^2} \quad (1.38)$$

Un ultima tecnica per calcolare la curvatura eseguita dal veicolo consiste nell'utilizzare la differenza di velocità delle ruote sullo stesso asse del veicolo stesso, in quanto esse percorrono nello stesso tempo circonferenze di raggio differente. La velocità di ogni punto del veicolo dipende dalla distanza dal centro di rotazione istantaneo:

$$\vec{v}_i = \vec{r} \times \vec{R}_i \quad (1.39)$$

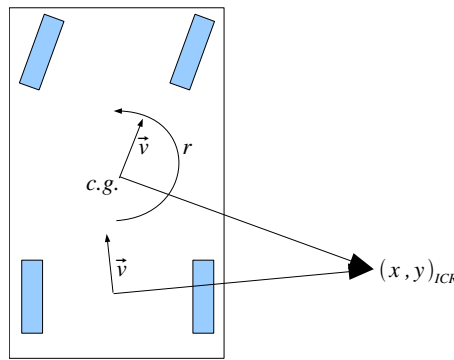


Figura 1.6: Centro di massa istantaneo e vettori velocità.

In condizione di deriva trascurabile, la differenza di velocità tra le due ruote posteriori (non sterzanti) vale

$$\Delta v = Br \quad (1.40)$$

e di conseguenza:

$$k = \frac{2}{B} \frac{v_o - v_i}{v_o + v_i} \quad (1.41)$$

Da notare l'indipendenza di k dall'unità con cui v è misurata. Questa relazione vale per le ruote posteriori: le ruote anteriori sterzanti ruotano a una velocità dipendente anche dall'angolo di sterzata (la proiezione del vettore velocità tangente) e perciò meno fruibile.

L'ultimo metodo che si può valutare è usare un GPS sufficientemente preciso per calcolare R direttamente.

1.3 Argomenti Avanzati

Moto in salita o discesa

Effetti del vento, in rettilineo e in curvatura (aerodynamic drag force)

Effetti da roll bank

1.4 Longitudinal Vehicle Dynamics

Quando il veicolo è in condizioni ideali di moto rettilineo uniforme e il motore riesce ad erogare abbastanza coppia la velocità del veicolo è direttamente proporzionale alla velocità angolare delle ruote

$$V_x = r_{eff} \omega_w \quad (1.42)$$

Il transiente tuttavia, quando $a_x \neq 0$, presenta diverse considerazioni. Tali valori sono importanti perchè quando la coppia fornita dal motore viene controbilanciata dalle forze esterne il veicolo non cambierà la velocità e non arriverà mai alla

velocità desiderata. Quando le forze che agiscono sul veicolo bilanciano la forza di trazione prodotta dal motore il veicolo smetterà di accelerare. Tale posizione è ovviamente dinamica e dipende dallo stato precedente del sistema.

Resta il fatto che la velocità del motore, anche trascurando la presenza di eventuali riduttori (es. cambio), deve variare in maniera continua e tale variazione è limitata dalla centralina del motore.

Se si analizza il moto di un veicolo su un generico piano inclinato la compensazione delle forze fornisce

$$ma = F_{xf} + F_{xr} - F_{aero} - R_{xf} - R_{xr} - mg \sin \theta \quad (1.43)$$

ovvero

$$ma = F_x - R_x - F_{aero} \quad (1.44)$$

dove F_x sono le forze complessive longitudinali applicate dalle ruote, R_x è la resistenza al rotolamento e F_{aero} la *Aerodynamic Drag Force*.

L'*Aerodynamic Drag Force* F_{aero} viene solitamente modellata come

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_F (V_x + V_{wind})^2 = D_a (V_x + V_{wind})^2 \quad (1.45)$$

Questo fattore si può stimare attraverso un *coast-down test*.

Le forze longitudinali sulle ruote (*longitudinal tire forces*) F_{xf} e F_{xr} dipendono da diversi fattori. Sono differenti in accelerazione o decelerazione e sono funzioni lineari della velocità in accelerazione, e inversamente proporzionali in frenata. Queste forze sono le forze primarie che contribuiscono alla trasmissione della potenza dal motore al moto del veicolo.

La resistenza al rotolamento R_{xf} e R_{xr} sono anche essa funzione di diversi fattori, compresa la velocità del veicolo, la resistenza areodinamica, l'inclinazione della strada. In prima approssimazione si può dire che tali valori siano proporzionali alle forze normali che vengono applicate su ogni ruota:

$$R_{xf} + R_{xr} \propto F_{zf} + F_{zr} = C_{roll} mg \quad (1.46)$$

dove f è definito come *rolling resistance coefficient*. Essendo la forza normale questa è influenzata da diversi fattori oltre al peso della vettura, tra i quali inclinazione della strada, beccheggio del veicolo, spinta areodinamica verso il basso e altre.

1.4.1 Slip Ratio

In condizioni perfette di non slittamento della ruota, la differenza tra la velocità del veicolo e la velocità di rotazione delle ruote è imprigionata elasticamente nel pneumatico.

La differenza tra la velocità longitudinale del veicolo V_x e la velocità equivalente $r_{eff} \omega_w$ è chiamata *Longitudinal Slip*. La *longitudinal slip ratio* è definita come

$$\sigma_x = \frac{r_{eff} \omega_w - V_x}{V_x} \quad (1.47)$$

durante la frenata, mentre

$$\sigma_x = \frac{r_{eff} \omega_w - V_x}{r_{eff} \omega_w} \quad (1.48)$$

durante l'accelerazione.

Il raggio efficace della ruota r_{eff} dipende dalla forza normale applicata sulla ruota e dal raggio a riposo.

Quando il rapporto è basso si ottiene che la forza applicata sulle ruote è proporzionale al rapporto:

$$\begin{aligned} F_{xf} &= C_{\sigma f} \sigma_{xf} \\ F_{xr} &= C_{\sigma r} \sigma_{xr} \end{aligned} \quad (1.49)$$

dove $C_{\sigma f}$ e $C_{\sigma r}$ sono chiamati parametri della *longitudinal tyre stiffness* delle ruote anteriori e posteriori rispettivamente.

1.4.2 Modello semplificato

La decelerazione di un veicolo alla velocità v dipende dalla resistenza areodinamica e dagli attriti del sistema. È possibile pertanto con una espansione in serie di Taylor, nel caso di veicolo in folle e di moto pianeggiante eseguire il *coast-down test*:

$$a = \frac{dv}{dt} = k_2 v^2 + k_1 v + k_0 \quad (1.50)$$

da cui consegue che

$$\int a dv = \frac{\arctan\left(\frac{k_2 v + \frac{1}{2} k_1}{\Delta}\right)}{\Delta} \quad (1.51)$$

da cui

$$v = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{k_2 v_0 + \frac{1}{2}k_1}{\Delta}\right) + t\Delta\right) \Delta - \frac{1}{2}k_1}{k_2} \quad (1.52)$$

avendo indicato con $\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{4k_0k_2 - k_1^2}$.

Il caso più comune $k_0 = 0$ semplifica il problema:

$$v = \frac{v_0 k_1}{e^{-tk_1} k_2 v_0 + e^{-tk_1} k_1 - k_2 v_0} \quad (1.53)$$

con v_0 la velocità iniziale.

Infine il caso limite $k_1 = 0$

$$v = \frac{v_0}{1 - k_2 v_0 t} \quad (1.54)$$

Nel caso di accelerazione si può approssimare

$$\frac{dv}{dt} = k e^{-\tau t} \quad (1.55)$$

da cui

$$v = k \frac{1 - e^{-\tau t}}{\tau} + v_0 \quad (1.56)$$

da cui a limite

$$\frac{k}{\tau} = v_1 - v_0 \quad (1.57)$$

Capitolo 2

Vehicle Control

2.1 Controllo veicolo basato su sterzo

Esaminiamo il caso di un generico veicolo (FWS *Front Wheel Steering*) nello stato iniziale di moto curvilineo uniforme (il moto rettilineo è un caso particolare di moto curvilineo con raggio di curvatura infinito) con velocità v e direzione iniziale θ_0 :

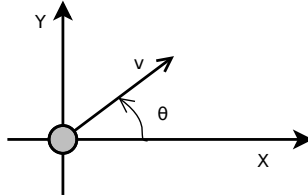


Figura 2.1: Centro di massa del veicolo in spostamento e rotazione

All'istante t_{-1} viene dato comando allo sterzo in modo da cambiare la direzione del veicolo da θ_0 a θ_1 , a fronte di una variazione dell'angolo del volante da δ_{w_0} a δ_{w_1} :

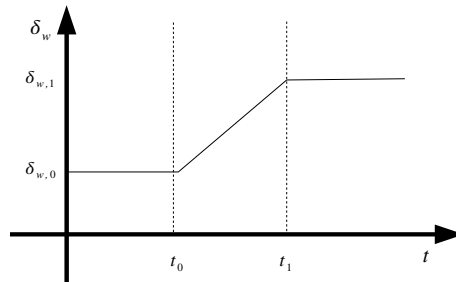


Figura 2.2: Transizione dell'angolo del volante

In questo caso, dopo un certo intervallo dovuto ai ritardi di controllo, viene eseguita una rotazione a velocità costante (in prima approssimazione, dipende molto dal tipo di controllo dello sterzo implementato) per variare la direzione del veicolo.

Nella dinamica del veicolo pertanto esistono due situazioni: una dove il volante è mantenuto a un angolo costante e una dove l'angolo dello sterzo varia (in prima approssimazione) linearmente.

Quando l'angolo di sterzo (e di conseguenza l'angolo tra il vettore velocità del veicolo con il sistema di riferimento) è costante, il veicolo si muove lungo una circonferenza di raggio R . Per questa ragione se il passaggio da δ_{w_0} a δ_{w_1} fosse istantaneo la traiettoria eseguita dal veicolo sarebbe composta esattamente da due archi di circonferenza. Quando però la transizione non è trascurabile il veicolo esegue archi di clotoide.

2.1.1 Clotoide

Per un veicolo in movimento la curvatura $\kappa = 1/R$ è sempre definita e limitata (non esistono automobili capaci di ruotare su loro stesse) mentre il raggio di curvatura R tende a infinito nei tratti rettilinei: per questa ragione è preferibile esprimere

le relazioni in funzione di κ piuttosto che R .

La clotoide è una linea curva la cui curvatura κ cambia linearmente a velocità σ :

$$\dot{\kappa} = \sigma \tag{2.1}$$

σ è chiamata *sharpness* della clotoide.

In questo documento la notazione $\dot{\kappa}$ indicherà una derivata di una funzione (in questo caso κ) rispetto allo spazio s (normalmente in fisica tale notazione indica invece la derivata rispetto al tempo, ma si può passare sempre in derivate del tempo facendo la semplice sostituzione $ds = vdt$).

Un veicolo è limitato meccanicamente sia nel raggio di curvatura $|\kappa| < \kappa_{max}$ sia fisicamente nella sharpness $|\sigma| < \sigma_{max}$.

Capitolo 3

Nomenclature

L	The distance between the front and rear axles in meters
B	The distance between wheels on the same axle in meters
δ	Wheel angle (some authors use ψ)
β	Slip Angle
κ	Curvature, rad/m
σ	Curve Sharpness, rad/m^2
δ_w	Steering Wheel Angle
R	Curve Radius in meters (ρ could be also used)
θ	Vehicle orientation in the reference frame, Absolute Yaw angle
r	Yaw-Rate, rad/s
$\dot{\theta}$	Yaw-Rate, rad/m
v	Speed, m/s
a	Acceleration, m/s^2
K_V	Understeer Gradient (K_{us})

Bibliografia

- [FS04] T. Fraichard and A. Scheuer. From reeds and shepp's to continuous-curvature paths. *Robotics, IEEE Transactions on*, 20(6):1025–1035, Dec. 2004.
- [Gil92] T. D. Gillespie. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE, Warrendale, PA, USA, 1992.
- [Hea85] Mark A. Heald. Rational approximations for the Fresnel integrals. *Mathematics of Computation*, 44(170):459–461, April 1985.
- [Jaz09] Reza N Jazar. Mathematical Theory of Autodriver for Autonomous Vehicles . *Journal of Vibration and Control*, page 1077546309104467, 2009.
- [LaV06] S. M. LaValle. *Planning Algorithms*, chapter 13. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006. Chapter 13: Differential Models.
- [Raj06] Rajesh Rajamani. *Vehicle Dynamics and Control*. Mechanical Engineering Series. Springer, 2006.
- [Wid02] J. P. Widerberg. Dynamic effect of the non-rigid modified bicycle model. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part D, Journal of automobile engineering*, volume 216 num.9, pages 717–722. Professional Engineering Publishing, September 2002.
- [Won01] J. Y. Wong. *Theory of Ground Vehicles*. Wiley-Interscience, 2001.
- [YRG03] P. Yih, J. Ryu, and J.C. Gerdes. Modification of vehicle handling characteristics via steer-by-wire. In *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 3, pages 2578–2583 vol.3, June 2003.