

# Vehicle Dynamic and Trajectory

Paolo Medici

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione di Parma

8 marzo 2010

This is only a preliminary italian version. English version will be ready as soon as possible (after the completion of the italian version, in order to not have two different version to update), but I hope that mathematics is an universal language and easy to be understood (for the moment).

## 1 Controllo veicolo basato su sterzo

Esaminiamo il caso di un generico veicolo (FWS *Front Wheel Steering*) nello stato iniziale di moto curvilineo uniforme (il moto rettilineo è un caso particolare di moto curvilineo con raggio di curvatura infinito) con velocità  $v$  e direzione iniziale  $\theta_0$ :

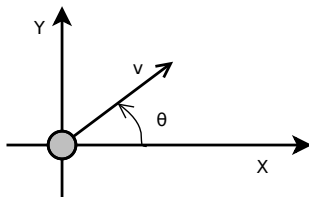


Figura 1: Centro di massa del veicolo in spostamento e rotazione

All'istante  $t_{-1}$  viene dato comando allo sterzo in modo da cambiare la direzione del veicolo da  $\theta_0$  a  $\theta_1$ , a fronte di una variazione dell'angolo del volante da  $\delta_{w_0}$  a  $\delta_{w_1}$ :

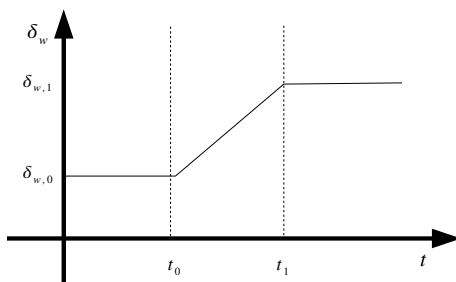


Figura 2: Transizione dell'angolo del volante

In questo caso, dopo un certo intervallo dovuto ai ritardi di controllo, viene eseguita una rotazione a velocità costante (in prima approssimazione, dipende molto dal tipo di controllo dello sterzo implementato) per variare la direzione del veicolo.

Nella dinamica del veicolo pertanto esistono due situazioni: una dove il volante è mantenuto a un angolo costante e una dove l'angolo dello sterzo varia (in prima approssimazione) linearmente.

Quando l'angolo di sterzo (e di conseguenza l'angolo tra il vettore velocità del veicolo con il sistema di riferimento) è costante, il veicolo si muove lungo una circonferenza di raggio  $R$ . Per questa ragione se il passaggio da  $\delta_{w_0}$  a  $\delta_{w_1}$  fosse istantaneo la traiettoria eseguita dal veicolo sarebbe composta esattamente da due archi di circonferenza. Quando però la transizione non è trascurabile il veicolo esegue archi di clotoide.

## 1.1 Clotide

Per un veicolo in movimento la curvatura  $\kappa = 1/R$  è sempre definita e limitata (non esistono automobili capaci di ruotare su loro stesse) mentre il raggio di curvatura  $R$  tende a infinito nei tratti rettilinei: per questa ragione è preferibile esprimere le relazioni in funzione di  $\kappa$  piuttosto che  $R$ .

La clotoide è una linea curva la cui curvatura  $\kappa$  cambia linearmente a velocità  $\sigma$ :

$$\dot{\kappa} = \sigma \quad (1)$$

$\sigma$  è chiamata *sharpness* della clotoide.

In questo documento la notazione  $\dot{\kappa}$  indicherà una derivata di una funzione (in questo caso  $\kappa$ ) rispetto allo spazio  $s$  (normalmente in fisica tale notazione indica invece la derivata rispetto al tempo, ma si può passare sempre in derivate del tempo facendo la semplice sostituzione  $ds = vdt$ ).

Un veicolo è limitato meccanicamente sia nel raggio di curvatura  $|\kappa| < \kappa_{max}$  sia fisicamente nella sharpness  $|\sigma| < \sigma_{max}$ .

## 2 Fondamenti del moto dei veicoli

In generale il veicolo esegue una traiettoria circolare, il quale centro di rotazione istantaneo (*ICR*) è il punto di incontro delle perpendicolari ai vettori di velocità delle singole ruote. Se tuttavia l'angolo di deriva (*slip angle*  $\beta$ ) è basso (solitamente questo vuole dire velocità del veicolo bassa) e il passo del veicolo  $L$  (distanza tra i due assi delle ruote) piccolo rispetto al raggio di curvatura  $R$ , il veicolo segue una traiettoria circolare dove il vettore velocità di ogni singola ruota coincide con la ruota stessa ( $\alpha_r = 0$  e  $\alpha_f = 0$ ): il centro di rotazione è l'incrocio delle perpendicolari alle ruote stesse (fig. 3).

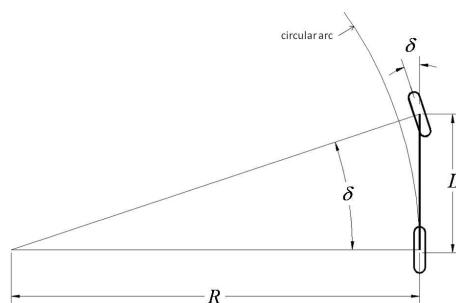


Figura 3: Simplified model for a two-axle vehicle: geometric Bicycle Model. Modello semplificato del veicolo.

Da semplici considerazioni geometriche è possibile collegare il raggio di curvatura  $\kappa$  all'angolo che assumono le ruote sterzanti del veicolo  $\delta$  (in diverse pubblicazioni tale angolo è indicato con  $\psi$ ):

$$\kappa(s) = \frac{\tan \delta(s)}{L} \quad (2)$$

Tale angolo è chiamato *Ackerman Angle*, *vehicle's steering angle* o *wheel angle*. Tale relazione introduce il modello del biciclo (fig. 3), dove le 4 ruote dell'auto vengono compresse in due ruote solamente (*single-track model*), compattando le ruote dello stesso asse.

È da notare che normalmente il raggio di curvatura è approssimato perpendicolare nel centro di massa nel caso di modello dinamico e all'asse posteriore nel caso del modello cinematico.

In entrambi i casi, la connessione tra l'angolo dello sterzo  $\delta_w$  e curvatura  $\kappa$  potrebbe essere non lineare (esiste una relazione biunivoca che lega  $\delta$  con  $\delta_w$ , e per come è costruito lo sterzo di Ackermann tale relazione normalmente è lineare) anche nel caso semplice del modello del biciclo.

Nel caso di angoli piccoli è facile trovare in letteratura [8, 7] una versione linearizzata dell'equazione 2:

$$\delta(s) \approx \frac{L}{R} \quad (3)$$

Un'altra versione è quella del modello di veicolo bitraccia (figura 4) dove l'angolo delle due ruote sterzanti vale

$$\tan \delta_o(s) = \frac{L}{R + \frac{B}{2}} \quad \tan \delta_i(s) = \frac{L}{R - \frac{B}{2}} \quad (4)$$

dove  $B$  è la distanza delle ruote sullo stesso asse,  $\delta_o$  è l'angolo della ruota esterna e  $\delta_i$  l'angolo della ruota interna alla curva.

L'equazione 4 può essere riscritta come

$$\cot \delta_o(s) - \cot \delta_i(s) = \frac{B}{L} \quad (5)$$

Questa condizione è nota come *Ackerman condition*[4] o *Jeantaud condition*.

Per semplicità normalmente si usa l'equazione 2 che fornisce il valor medio dei due angoli, ma la deviazione dovuta a questa approssimazione può essere non trascurabile. Se si vuole tenere conto del modello completo (*double track model*) l'equazione 2 può essere riscritta in termine dell'angolo interno:

$$\kappa = \frac{2 \tan \delta_i}{2L + B \tan |\delta_i|} \quad (6)$$

Se si considera il legame tra  $\delta_w$  e  $\delta_i$ , il fatto che il centro di rotazione è supposto sull'asse posteriore, risulta evidente come sia difficile legare  $\delta_w$  a  $\kappa$ .

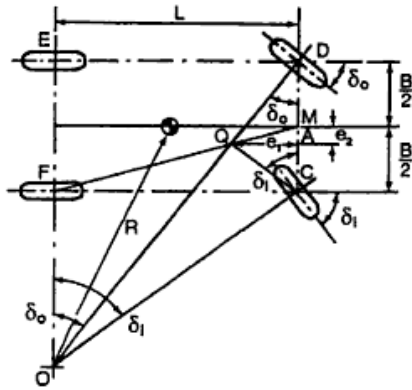


Figura 4: Modello "bitraccia" del veicolo. Steering geometry for a road vehicle (Wong)

## 2.1 Cinematica dei veicoli

Uno dei modelli più semplici da capire è quello della *simple car* [5] (un elenco dei sinonimi di tale modello è elencato sotto). Verrà utilizzato il modello cinematico del biciclo, lasciando la trattazione del modello dinamico alla sezione successiva. Immaginiamo il veicolo come un corpo rigido che si muove su un piano e rappresentiamo lo stato del veicolo come  $q = (x, y, \theta)$ .

Definiamo  $s$  lo spazio percorso sull'arco di circonferenza dal centro di massa del veicolo (o del dentro dell'asse posteriore),  $\theta(s)$  è l'angolo che assume il veicolo (*heading*) rispetto al sistema di riferimento,  $\kappa(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{d\theta}{ds}$  la variazione della direzione del veicolo  $\theta$  ovvero la curvatura in un punto dato che cambia in base alla posizione linearmente  $\kappa(s) = \kappa_0 + \sigma s$ . La *sharpness*  $\sigma = \frac{d\kappa}{ds}$  è la variazione della curvatura rispetto alla distanza  $s$  percorsa sulla curva.  $\kappa_0$  è la curvatura iniziale, mentre  $\theta_0$  è l'angolo

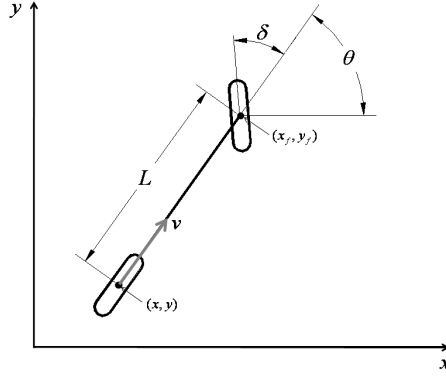


Figura 5: Kinematic Bicycle Model. Modello semplificato del veicolo.

iniziale. Siccome si suppone il veicolo a velocità costante, usare  $s$  o  $t$  risulta indifferente (a meno di un fattore moltiplicativo  $ds = vdt$ ).

Per piccole variazioni di spazio (o tempo) il veicolo (il centro di massa/asse centrale posteriore) si muoverà nella direzione in cui è orientato.

Quello che viene chiamato modello cinematico del biciclo, o *Ackermann kinematic model*, o modello *CC car* (*Continuous Curvature Car* [1] o anche *continuous-steering car* [5]), usando la 2, è un sistema differenziale:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta \\ \dot{y} &= \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \kappa \\ \dot{\kappa} &= \sigma\end{aligned}\tag{7}$$

dove la notazione indica la derivata dello spazio percorso  $ds$ . Esplicitando  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta} = \kappa(s) = \kappa_0 + \sigma s\tag{8}$$

e conseguentemente

$$\theta(s) = \frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s + \theta_0\tag{9}$$

È infine da notare che  $\dot{\kappa}$  secondo l'equazione 2 vale

$$\sigma = \dot{\kappa} = \frac{\dot{\delta}}{L \cos^2 \delta}\tag{10}$$

È chiaro pertanto che l'aver  $\dot{\delta}$  costante non basta per avere  $\sigma$  costante, se non per  $\delta$  piccoli.

## 2.2 Calcolo della traiettoria dal punto di vista computazionale

Come risulta evidente, mantenere nelle equazioni  $\theta_0$  e  $\kappa_0$  complica il problema dal punto di vista computazione, e in ogni caso l'integrale  $\int \sin(s^2) ds$  non è fornito normalmente da un calcolatore ma bisogna appoggiarsi a una funzione esterna, meno efficiente. Per quanto riguarda l'angolo iniziale  $\theta_0$  con cui il veicolo è orientato, questo rappresenta una pura rotazione del mondo e conseguentemente tale angolo può essere sempre sottointeso (il risultato si ricava anche dalle formule di addizione trigonometriche di seno e coseno).

Supponiamo di percorrere distanze  $s$  abbastanza piccole da poter fare l'espansione di Taylor del seno e del coseno delle equazioni 7 tali che:

$$\begin{aligned}\dot{x} = \cos \theta(s) &= 1 - \theta(s)^2/2 + \theta(s)^4/24 + O(5) \\ \dot{y} = \sin \theta(s) &= \theta(s) - \theta(s)^3/6 + \theta(s)^5/120 + O(5)\end{aligned}\tag{11}$$

da cui è possibile ottenere infine gli integrali come somma di polinomi. Il non inserire  $\theta_0$  nell'espansione di Taylor permette di poter considerare qualsiasi angolo iniziale senza perdere ulteriormente precisione.

Combinando la precedente con l'equazione 9 si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta(s) = 1 - (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^2/2 + (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^4/24 + O(5) \\ \dot{y} &= \sin \theta(s) = \frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s - (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^3/6 + (\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s)^5/120 + O(5)\end{aligned}\quad (12)$$

la cui soluzione è un integrale di polinomi.

Infine è possibile anche una forma un po' più chiusa dell'equazione, usata frequentemente in letteratura. Se si suppone di avere oltre a  $\theta_0 = 0$  anche la curvatura iniziale nulla  $\kappa_0 = 0$  si ha la classica equazione della clotoide espressa con gli integrali di Fresnel:

$$\begin{aligned}x(s) &= \int \cos(\frac{1}{2}\sigma s^2) ds = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} C(\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} s) \\ y(s) &= \int \sin(\frac{1}{2}\sigma s^2) ds = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} S(\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} s)\end{aligned}\quad (13)$$

dove  $C(S)$  e  $S(s)$  sono le funzioni coseno e seno di Fresnel, definite come:

$$\begin{aligned}S(x) &= \text{fresnel}_s(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt \\ C(x) &= \text{fresnel}_c(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi}{2} t^2) dt\end{aligned}\quad (14)$$

In questo modo risulta possibile usare le clotoidi solo come funzioni che collegano linee a circonferenze (curvatura iniziale zero), circonferenze a linee (invertendo gli estremi di integrazione, curvatura finale zero), ma non è possibile collegare circonferenze a circonferenze, tantomeno clotoidi a clotoidi.

Per completezza, mantenere  $\kappa_0$  porterebbe alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\int \cos(\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s) ds &= \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left( \cos \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} C\left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) + \sin \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} S\left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) \right) \\ \int \sin(\frac{1}{2}\sigma s^2 + \kappa_0 s) ds &= \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left( \cos \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} S\left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) - \sin \frac{\kappa_0^2}{4\sigma} C\left(\frac{\sigma s + \kappa_0}{\sqrt{\pi\sigma}}\right) \right)\end{aligned}\quad (15)$$

Come ultima nota, esistono delle approssimazioni con funzioni razionali all'equazione della clotoide[3].

### 2.3 Movimento senza variazioni di curvatura

Per completezza valutiamo quale sarebbero le equazioni del veicolo nel caso in cui le variazioni di curvatura non siano presenti o siano comunque trascurabili.

In questo caso le equazioni del moto sarebbero

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \kappa s \\ \dot{x} &= \cos \theta = \cos(\theta_0 + \kappa s) \\ \dot{y} &= \sin \theta = \sin(\theta_0 + \kappa s)\end{aligned}\quad (16)$$

con  $\kappa$  costante. In questo caso gli integrali sono conosciuti e valgono:

$$\begin{aligned}x &= \int \cos \theta = \frac{\sin(\theta_0 + \kappa s) - \sin(\theta_0)}{\kappa} \\ y &= \int \sin \theta = \frac{\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0 + \kappa s)}{\kappa}\end{aligned}\quad (17)$$

o imponendo  $\theta_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}x &= \int \cos \theta = \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa} \\ y &= \int \sin \theta = \frac{1 - \cos(\kappa s)}{\kappa}\end{aligned}\quad (18)$$

### 2.4 Trasformazioni di coordinate

Le equazioni del movimento del centro di massa (o dell'asse posteriore) nel tempo valgono:

$$\begin{aligned}dx &= v \cos \theta dt \\ dy &= v \sin \theta dt \\ d\theta &= r dt\end{aligned}\quad (19)$$

Supponendo che all'inizio  $\theta_0 = 0$  e che nell'istante di tempo della simulazione lo *yawrate*  $r$  rimanga costante, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{v}{r} \sin rt \\
y(t) &= \frac{v}{r} (1 - \cos rt) \\
\theta(t) &= rt
\end{aligned}
\tag{20}$$

Il cambio di sistema di riferimento pertanto si può modellare come puro spostamento e pura rotazione. Chiaramente il sistema a limite  $r \rightarrow 0$  tende a un moto rettilineo uniforme.

Abbiamo a questo punto a disposizione un centro di rotazione  $(x_r, y_r)$  istantaneo localizzato nel sistema di riferimento corrente, e un angolo  $\vartheta$  di variazione dello yaw. Prendiamo la matrice di rotazione, in modo da capire dove il generico punto  $(x, y)$  del mondo finisce rispetto al preesistente sistema di riferimento:

$$\begin{aligned}
x' &= \cos \vartheta (x - x_r) - \sin \vartheta (y - y_r) + x_r = \cos \vartheta x - \sin \vartheta y + x_r (1 - \cos \vartheta) + y_r \sin \vartheta \\
y' &= \sin \vartheta (x - x_r) + \cos \vartheta (y - y_r) + y_r = \sin \vartheta x + \cos \vartheta y + y_r (1 - \cos \vartheta) - x_r \sin \vartheta
\end{aligned}
\tag{21}$$

### 3 Dynamic Vehicle Model

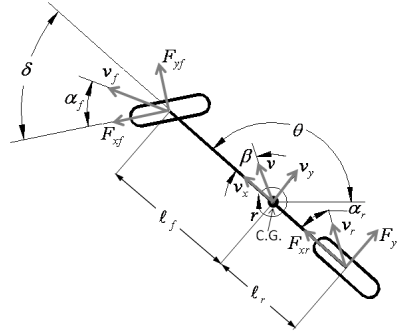


Figura 6: Dynamic Bicycle Model

Il modello del biciclo semplificato non tiene conto della dinamica e delle forze laterali effettive che incidono sul veicolo. Quello presentato finora viene chiamato Modello Cinematico del veicolo. Ora viene presentato il modello dinamico. L'obiettivo e' quello di ottenere un modello dinamico del veicolo, che poi linearizzato, fornisca una stima leggermente piu accurata del moto del veicolo.

A velocità elevate, l'ipotesi che il vettore forza di ogni ruota sia nella direzione della ruota stessa, non è più valida [6]. In questo caso, invece di un modello cinematico, deve essere introdotto un modello dinamico, il quale ha delle variabili interne in più con una loro dinamica dipendente dal tempo.

In figura 6,  $\delta$  è l'angolo delle ruote sterzanti,  $\mathbf{v}$  il vettore velocità del centro di massa (con le sue due componenti proiettate sull'asse del veicolo e perpendicolari ad esso),  $\beta$  è l'angolo di deriva del centro di massa, e  $\alpha_f$  e  $\alpha_r$  l'angolo di deriva delle singole ruote.

#### 3.1 Ackermann Steering Model con deriva: Steady-State curve

Il modello di veicolo a 3 parametri acquisisce il parametro  $\beta$ . La variabile  $\beta$  è la nuova variabile interna dipendente dal tempo e dal moto. Gli angoli  $\alpha_r$  e  $\alpha_f$  sono gli angoli che formano il vettore velocità delle singole ruote rispetto all'asse del veicolo. Istantaneamente il veicolo esegue una rotazione centrato nel punto di incontro della perpendicolare di tali velocità.

Dall'analisi geometrica della figura 7 si evince che:

$$x_{ICR} = \frac{L}{1 - \cot \alpha_r \tan(\alpha_f + \delta)} \quad y_{ICR} = -\cot \alpha_r x_{ICR}
\tag{22}$$

Eseguendo diverse semplificazioni (forzando per esempio  $R$  perpendicolare al veicolo nel centro di massa) si ottiene

$$\delta = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r
\tag{23}$$

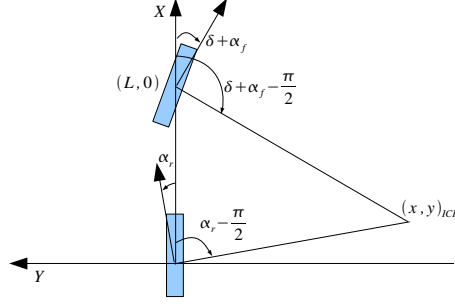


Figura 7: Centro di rotazione istantaneo.

L'angolo  $\delta$  necessario per affrontare una curva ora è funzione non solo del raggio di curvatura  $R$  (misurato sul centro di massa), ma anche degli angoli di deriva delle singole ruote. Gli angoli  $\alpha_f$  e  $\alpha_r$  sono dipendenti dalle forze laterali che agiscono sui rispettivi pneumatici.

L'angolo  $\beta$  viene chiamato angolo di deriva (*slip angle*) e rappresenta l'angolo fra l'asse del veicolo e la velocità di avanzamento  $\mathbf{v}$ :

$$\beta = \arctan\left(\frac{l_r}{\sqrt{R^2 - l_r^2}}\right) \quad (24)$$

Le equazioni del moto diventano con questo angolo aggiuntivo  $\gamma = \delta + \beta$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \gamma \\ \dot{y} &= \sin \gamma \\ \dot{\theta} &= \frac{\cos \beta}{L} \tan \delta \end{aligned} \quad (25)$$

La forza centrifuga applicata alla vettura  $F_c = mR\dot{\theta}^2 = m\frac{v_x^2}{R}$  sul centro di massa deve essere bilanciata dalla risposta laterale dei pneumatici [2, 7]:

$$F_{yf} + F_{yr} = F_c = m\frac{v_x^2}{R} \quad (26)$$

e per la conservazione del momento angolare:

$$F_{yf}l_f = F_{yr}l_r \quad (27)$$

la cui soluzione fornisce:

$$F_{yr} = m\frac{l_f v_x^2}{LR} \quad F_{yf} = m\frac{l_r v_x^2}{LR} \quad (28)$$

In generale la risposta dei pneumatici (la *Tyre Stiffness*) si modella con una espansione in serie di Taylor (questi valori sono empirici, dipendenti da tantissimi parametri):

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \frac{F_{yf}}{2C_{\alpha f}} \\ \alpha_r &= \frac{F_{yr}}{2C_{\alpha r}} \end{aligned} \quad (29)$$

tenendo conto delle due ruote per asse (normalmente si vede questa relazione senza il 2 a denominatore, incorporato nella costante  $C$ ).

Saltando la trattazione (si può trovare in tantissimi articoli, per esempio in [9]) che solitamente viene fatta in questa fase, si arriva ad ottenere un sistema del tipo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\delta(t) \quad (30)$$

dove vengono linearizzate tutte le componenti. Tale modello è valido per velocità elevate ma per angoli di deriva piccoli e per regioni lineari di risposta del pneumatico.

È da notare che alcuni articoli mostrano come sia possibile usare la velocità laterale  $v_y$  come parametro interno, piuttosto che  $\beta$ .

### 3.2 Steady-State: SottoSterzo e Sovrasterzo

È possibile sviluppare un modello cinematico leggermente migliore, tenendo conto della dinamica del veicolo, ma trascurando l'angolo di deriva (modello *Steady-State*). In letteratura [7, 6, 8] viene mostrato come arrivare all'equazione della curvatura 2 in presenza di sottosterzo o sovrasterzo dovuto all'interazione tra le ruote e la strada. Dall'equazione 23 si ottiene

$$\delta(s) = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{L}{R} + K_V \frac{v_x^2}{R}$$

o

$$\kappa(s) = \frac{\delta(s)}{L + K_V v_x^2} \quad (31)$$

dove si linearizzano i contributi introdotti dalla velocità  $v_x$  alla traiettoria eseguita dal veicolo. Il coefficiente  $K_V$  è il gradiente di sottosterzo, con  $K_V > 0$  sottosterzante,  $K_V = 0$  neutro e  $K_V < 0$  sovrasterzante.

Per i veicoli sovrasterzanti è anche possibile stimare una velocità critica, sopra la quale il veicolo diventa ingovernabile:

$$v_{crit} = \sqrt{-\frac{L}{K_V}} \quad (32)$$

### 3.3 Determinazione dei parametri del veicolo

Dall'equazione 31 e dal fatto che  $\delta(s) = f(\delta_w(s))$  dove solitamente  $f$  non è conosciuta in forma chiusa, si può dire che esiste una equazione generica  $k$  tale che

$$\kappa(s) = k(\delta_w(s), v_x(s)) \quad (33)$$

tale equazione può essere generata con spline o con espansione in serie, partendo per esempio dalle informazioni prodotte da un sensore di yaw-rate  $r = \partial\theta/\partial t$ .

Sia  $r$  il valore di yaw-rate<sup>1</sup> tale che  $t = \frac{2\pi}{r}$  tempo necessario per eseguire una rivoluzione completa su una circonferenza di perimetro  $s = 2\pi R = v_x t = \frac{2\pi}{r} v_x$  per cui

$$\kappa = \frac{r}{v_x} \quad r = \kappa v_x \quad (34)$$

ovvero, in forma differenziale:

$$k(\delta_w, v_x) = \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{v_x} \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (35)$$

Siccome tale relazione vale sempre, è sempre possibile stimare  $r$  dalla conoscenza di  $\kappa$ , spostando il problema della conoscenza di  $\kappa$  dalla conoscenza di  $r$ .

Dall'equazione 34 e da 31 è possibile calcolare il sistema lineare omogeneo

$$Lr + K_{us} v_x^2 r - m_0 v_x - \delta_w m_1 v_x - \delta_w^3 m_3 v_x = 0 \quad (36)$$

avendo usando una espansione in serie di Taylor  $\delta = -\tan \delta_0 + \delta_w m_1 + \delta_w^3 m_3$ . che minimizzato ritorna i parametri richiesti

Il secondo metodo per stimare  $\kappa$  si basa sulla considerazione che anche l'accelerazione laterale  $a_y = \frac{v_x^2}{R} = v_x^2 k$  è funzione della curvatura:

$$k(\delta_w, v_x) = \frac{a_y}{v_x^2} \quad (37)$$

Un ultima tecnica per calcolare la curvatura eseguita dal veicolo consiste nell'utilizzare la differenza di velocità delle ruote sullo stesso asse del veicolo stesso, in quanto esse percorrono nello stesso tempo circonferenze di raggio differente. La velocità di ogni punto del veicolo dipende dalla distanza dal centro di rotazione istantaneo:

$$\vec{v}_i = \vec{r} \times \vec{R}_i \quad (38)$$

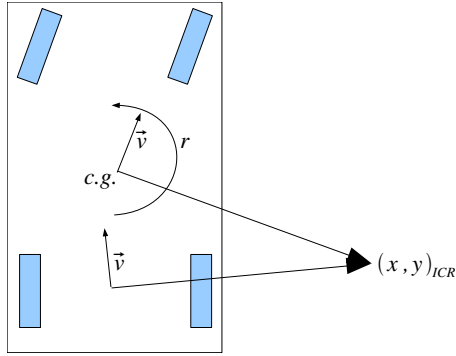


Figura 8: Centro di massa istantaneo e vettori velocità.

In condizione di deriva trascurabile, la differenza di velocità tra le due ruote posteriori (non sterzanti) vale

$$\Delta v = Br \quad (39)$$

e di conseguenza:

$$k = \frac{2 v_o - v_i}{B v_o + v_i} \quad (40)$$

Da notare l'indipendenza di  $k$  dall'unità con cui  $v$  è misurata. Questa relazione vale per le ruote posteriori: le ruote anteriori sterzanti ruotano a una velocità dipendente anche dall'angolo di sterzata (la proiezione del vettore velocità tangente) e perciò meno fruibile. L'errore di misura di  $r$  ottenuto in questo modo è pari a  $2\varepsilon/B$ .

L'ultimo metodo che si può valutare è usare un GPS sufficientemente preciso per calcolare  $R$  direttamente.

## 4 Nomenclature

$L$	The distance between the front and rear axles in meters
$B$	The distance between wheels on the same axle in meters
$\delta$	Wheel angle (some authors use $\psi$ )
$\beta$	Slip Angle
$\kappa$	Curvature, $rad/m$
$\sigma$	Curve Sharpness, $rad/m^2$
$\delta_w$	Steering Wheel Angle
$R$	Curve Radius in meters ( $\rho$ could be also used)
$\theta$	Vehicle orientation in the reference frame, Absolute Yaw angle
$r$	Yaw-Rate, $rad/s$
$\dot{\theta}$	Yaw-Rate, $rad/m$
$v$	Speed, $m/s$
$a$	Acceleration, $m/s^2$
$K_V$	Understeer Gradient ( $K_{us}$ )

## Riferimenti bibliografici

- [1] T. Fraichard and A. Scheuer. From reeds and shepp's to continuous-curvature paths. *Robotics, IEEE Transactions on*, 20(6):1025–1035, Dec. 2004.
- [2] T. D. Gillespie. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE, Warrendale, PA, USA, 1992.
- [3] M. A. Heald. Rational approximations for the Fresnel integrals. *Mathematics of Computation*, 44(170):459–461, Apr. 1985.

<sup>1</sup>È da notare che  $r$  sono  $rad/s$ , mentre  $k$  sono  $rad/m$

- [4] R. N. Jazar. Mathematical Theory of Autodriver for Autonomous Vehicles . *Journal of Vibration and Control*, page 1077546309104467, 2009.
- [5] S. M. LaValle. *Planning Algorithms*, chapter 13. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006. Chapter 13: Differential Models.
- [6] R. Rajamani. *Vehicle Dynamics and Control*. Mechanical Engineering Series. Springer, 2006.
- [7] J. P. Widerberg. Dynamic effect of the non-rigid modified bicycle model. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part D, Journal of automobile engineering*, volume 216 num.9, pages 717–722. Professional Engineering Publishing, September 2002.
- [8] J. Y. Wong. *Theory of Ground Vehicles*. Wiley-Interscience, 2001.
- [9] P. Yih, J. Ryu, and J. Gerdes. Modification of vehicle handling characteristics via steer-by-wire. In *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 3, pages 2578–2583 vol.3, June 2003.