Controlli automatici

Esercizi sulla forma di Jordan e sull'esponenziale di matrice

Mettere le seguenti matrici in forma di Jordan e calcolare l'esponenziale di matrice e^{At}.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$p(s) = (s-2)^2$, unico autovalore $\lambda = 2$.

$$V_1 = \ker(A-2I);\ \dim V_1 = \dim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$
$$V_2 = \ker(A-2I)^2;\ \dim V_2 = 2.$$

Possiamo dire a questo punto che la forma di Jordan sarà $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Costruiamo la base, scegliamo $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ appartenente a V_2 ma non a V_1 e costruiamo la catena

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0.$$

Abbiamo $A = TJT^{-1}$, dove $T = [w_1\ w_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$e^{At} = Te^{Jt}T{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\,t} & te^{2\,t} \\ 0 & e^{2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\,t} & 0 \\ te^{2\,t} & e^{2\,t} \end{bmatrix}.$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$p(s) = (s-2)^4$, c'è un unico autospazio generalizzato di dimensione 4 associato all'autovalore 2.

$$V_1 = \ker(A-2I);\ \dim\ker(A-2I) = \dim\ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

$V_2 = \ker(A-2I)^2;\ \dim\ker(A-2I)^2 = 4.$

A questo punto siamo già in grado di dire che ci sono due catene di ordine 2 e che quindi la forma di Jordan sarà

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

troviamo ora la base che consente di mettere A in tale forma, prendendo due vettori indipendenti che appartengano a V_2 ma non a V_1, scegliamo $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e costruiamo le catene

$$\begin{array}{ccccc} w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & 0 \\ w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

possiamo scrivere $A = TJT^{-1}$, con $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, quindi

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} + te^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ -te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$p(s) = s^3(s-2)$, consideriamo $\lambda = 0$

$$V_1 = \ker A = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \dim V_1 = 1$$

$$V_2 = \ker A^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \dim V_2 = 2$$

$$V_3 = \ker A^3 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \dim V_3 = 3$$

ci fermiamo perchè abbiamo raggiunto la molteplicità algebrica di $\lambda = 0$ nel polinomio caratteristico, visto che $\lambda = 2$ ha molteplicità 1 possiamo già individuare la forma di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Troviamo ora la base, per $\lambda = 0$, prendiamo w_3 appartenente a V_3 e non a V_2, otteniamo la catena

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0,$$

per $\lambda = 2$ otteniamo la catena di ordine 1 costituita da un autovettore, cioè

$$w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in ker(A - 2I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

infine $A = TJT{-}1$, con $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 1/2\,t^2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+t & t & 0 & 1/2\,t^2 \\ -t & -t+1 & 0 & -1/2\,t^2+t \\ 0 & 0 & e^{2\,t} & e^{2\,t}-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$